

MAT 4100 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad: ..CEVAP ANAHTARI

25.06.2026

No :

Soru 1) Yedinci dereceden en genel düşürülmüş bir polinomda köklerin toplamını ve çarpımını katsayılar cinsinden ifade ediniz. (20 puan)

Polinom düşürülmüş olduğundan altıncı dereceden terimin katsayısı sıfırdır. Bu nedenle polinom en genel şekliyle

$P(x) = ax^7 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ olarak ifade edebiliriz. Burada kökler toplamı $-b/a = 0$ ve çarpımı da $-h/a$ olur.

Soru 2) Z_9 ile $GF(9)$ cebirsel yapılarını karşılaştırınız. Benzerlik ve farkları belirtiniz. (20 puan)

Her iki yapı da 9 elemanlıdır. 9 asal olmadığından $Z_9 = [0,1,2,3,4,5,6,7,8]$ bir cisim değildir. Bir halkadır. Zaten sıfır dışında 3 ve 6'nın çarpımsal tersleri mevcut değildir. 9 bir asal kuvvet olduğundan $GF(9)$ bir cisimdir. $GF(3) = Z_3 = \{0,1,2\}$ cisminin ikinci dereceden bir minimal polinom yardımıyla genişletilmesiyle elde edilir. Bu yapıda sıfır hariç tüm elemanların tersleri mevcuttur.

Soru 3) Rasyonel sayılar cismi Q ve tamsayılar halkası Z üzerinde bir polinomun indirgenebilirliğinin farklarını tartışınız. (20 puan)

İndirgenebilirlik, polinomun daha düşük dereceli polinomların çarpımı olarak yazılabilmesine bağlıdır. Q üzerinde çarpanlarına ayrılabilen bir polinom, paydalar eşitlenerek elde edilen ortak payda ile çarpılınca Z üzerinde çarpanlara ayrılması elde edilir. Yani Z ve Q üzerinde indirgenebilme arasında bir fark yoktur.

Soru 4) $7x^4 - 21x^3 + 6ax^2 + 7bx + 147$ polinomunun Eisenstein kriterine göre Q üzerinde indirgenemez olabilmesi için a ve b tamsayıları hakkında neler söylenebilir? (20 puan)

Öncelikle 21, 6a, 7b ve 147 sayılarının hepsini bölen asal sayıları bulmalıyız. 21'in ve 147'nin asal bölenleri 3 ve 7'dir. Ancak $7^2 = 49$ sayısı, 147'yi böldüğünden Eisenstein kriterinin şartları sağlanmaz. Yani tek aday asal sayı 3 olur. İkinci olarak 3'ün 7'yi bölmemesi ve $3^2 = 9$ 'un da 147'yi bölmemesi gerekir ki bunlar sağlanır. O halde geriye 3'ün 6a ve 7b sayılarını bölmesi kalır. Bunlardan ilki her zaman sağlanır. O halde tek koşul 3'ün 7b'yi bölmemesidir ki bu da b'nin 3 ile bölünen bir tamsayı olmasına denktir. Yani a bir tamsayı ve b de 3'ün bir katı olmalıdır.

Soru 5) $GF(2)$ cismini $GF(16)$ cismine genişletmede kullanılan tüm minimal polinomları bulunuz. (20 puan)

Genişleme dördüncü dereceden olduğundan ve $GF(2)$ cisminde 1 ile -1 arasında fark olmadığından baş katsayıyı 1 seçmekte bir hata yapmayız. Dolayısıyla aranan 16 adet minimal polinom adayı $x^4, x^4+x^3, x^4+x^2, x^4+x, x^4+1, x^4+x^3+x^2, x^4+x^3+x, x^4+x^3+1, x^4+x^2+x, x^4+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+x^2+x, x^4+x^3+x^2+1, x^4+x^3+x+1, x^4+x^2+x+1$ ve $x^4+x^3+x^2+x+1$ şeklindedir. Bunlar arasında $x = 0$ ve $x = 1$ yazdığımızda mod 2'de sıfır olmayanlar $x^4+x^3+1, x^4+x^2+1, x^4+x+1$ ve $x^4+x^3+x^2+x+1$ aranan polinomlardır.

Not: Süre 50 dakikadır. Başarılar. İNC