

MAT 4100 GALOIS TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....ÇÖZÜMLER.....

21.04.2026

No :.....

Soru 1) Tamsayılar halkasında $2x+1 = 5$ denklemini kullanılan tüm aksiyomları belirterek adım adım çözünüz. (20 puan)

$(2x+1)+(-5) = 5+(-5)$ toplamsal ters eleman
 $2x+(1+(-5)) = 0$ toplamsal birleşme
 $2x-4 = 0$ toplama işlemi
 $2(x-2) = 0$ dağılma özelliği
 $x-2 = 0$ sıfır bölensizlik
 $(x-2)+2 = 0+2$ toplama özelliği
 $x+(-2+2) = 2$ toplamsal birleşme
 $x+0 = 2$ toplamsal ters eleman
 $x=2$ etkisiz eleman

Soru 2) Sadeleştirme kuralı bir halkada, bir tamlık bölgesinde ve bir cisimde geçerli midir? (20 puan)

"Bir R halkasının bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter şart sadeleştirme kuralının gerçekleşmesidir" teoremi gereği en az tamlık bölgesine sahip olmalıyız. Bu nedenle bir halkada sadeleştirme kuralı geçerli olmayabilir ama bir tamlık bölgesinde ve aynı zamanda bir tamlık bölgesi olan bir cisimde sadeleştirme kuralları geçerlidir.

Soru 3) $x^6 - 24x^5 + 16x^4 - 48x^2 + 120 = 0$ denkleminde köklerin üçerli ve dörderli çarpımlarının toplamlarını elde ediniz. (20 puan)

Burada $a=1$, $b=-24$, $c=16$, $d=0$, $e=-48$, $f=0$ ve $g=120$ 'dir. Köklerin birer birer toplamı $-b/a$, ikişerli çarpımlarının toplamı c/a , üçerli çarpımlarının toplamı $-d/a$, dörderli çarpımlarının toplamı e/a olduğundan sorulan iki toplam $-d/a = 0$ ve $e/a = -48$ olur.

Soru 4) $f(x)$ ya da $g(x)$ sabit olmamak üzere, $R = \mathbb{Z}_9[x]$ 'de $2 = f(x)g(x)$ şeklinde bir çarpanlara ayırmanın mümkün olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$f(x) = 3x+1$ ve $g(x) = 3x+2$ için istenen durum $\mathbb{Z}_9[x]$ 'de sağlanmaktadır.

Soru 5) Katsayıları bir cisimden, tamlık bölgesinden veya bir halkadan alınan iki polinomun çarpımının derecesi ile bu polinomların derecelerinin toplamı arasındaki ilişkiyi belirleyiniz? (20 puan)

Sorulan soru sıfır bölenlerin varlığı ile ilgilidir. İki polinomun çarpımının derecesi normalde iki polinomun derecelerinin toplamına eşit olur ancak eğer baş katsayıların çarpımı sıfıra dönüşüyorsa çarpımın ilk terimi yok olur ve derece düşer. Bir tamlık bölgesinde veya cisimde sıfır bölen olmadığından (yani sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfır olamayacağından) çarpım polinomunda ilk terim yok olmaz ve çarpımın derecesi, çarpılan polinomların derecelerinin toplamıdır. Ancak herhangi bir halkada baş katsayıların çarpımı sıfır olabileceğinden derece düşebilir. Örneğin \mathbb{Z}_{12} halkasında $3x+1$ ile $4x+2$ çarpıldığında $12x^2+10x+2$ elde edilir ve bu polinom \mathbb{Z}_{12} 'de $10x+2$ olarak indirgeneceğinden iki tane birinci dereceden polinomun çarpımı 2 yerine 1 olmaktadır.

Not: Süre 50 dakikadır. Başarılar. İNC