MAT 4100 GALOIS TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAPLAR………………... **22.04.2024**

No :..

Soru 1) n birleşik bir sayı olduğunda $\mathbb{Z}_n$ halkasının bir tamlık bölgesi olup olmayacağını açıklayınız. (20 puan)

n birleşik bir sayı olsun. $n = ab$ olacak biçimde $1 < a, b < n$ sayıları mevcuttur. a ve b elemanları 1'den büyük ve n'den küçük olduğundan n modunda sıfırdan farklıdırlar. Ama $ab = n$, n modunda sıfırdır. Yani çarpımı sıfır olan sıfırdan farklı iki eleman mevcuttur. Bunlar sıfır bölenlerdir. Yani bu halka bir tamlık bölgesi olamaz.

Soru 2) Bir R tamlık bölgesinde sıfırdan farklı $x, y, z, t \in R$ için $x = zy$ ve $y = tx$ iken $zt = 1$ olduğunu göstererek z ve t'nin R'de birim olduklarını gösteriniz. (20 puan)

$x, y, z, t \in R$ için $x = zy$ ve $y = tx$ olsun. İki eşitlikten

$$x = zy = ztx$$

elde edilir ki sadeleştirme kuralları geçerli olduğundan $zt = 1$ yazılabilir. Bu da z ve t'nin 1'i böldüklerini ve birim olduklarını gösterir.

Soru 3) $f : R \to S$ ve $g : S \to T$ iki halka homomorfizmi olsunlar. $gf : R \to T$ dönüşümünün de bir halka hamomorfizmi olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Her $a,b \in R$ için $gf(a+b) = gf(a)+gf(b)$, $gf(ab) = gf(a)gf(b)$ ve $gf(1) = 1$ olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak f'in, sonra da g'nin homomorfizm olduklarını kullanırsak

$$\begin{aligned} gf(a+b) &= g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b)) \\ &= g(f(a))+g(f(b)) \\ gf(ab) &= g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) \\ &= gf(a)gf(b) \end{aligned}$$

ve $gf(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$

olur ve gf bir homomorfizmdir.

Soru 4) $\mathbb{Z}[i] = \{m+ni \mid m, n \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$ Gauss tamsayıları halkasının kesir cismini bulunuz. (20 puan)

Aranan kesir cisminin elemanları $\mathbb{Z}[i]$'nin herhangi bir elemanını sıfırdan farklı bir elemana bölerek elde edilir. O halde, a,b,c,d tamsayı ve c.d sıfırdan farklı olmak üzere $(a+bi)/(c+di) = (ac-bd)/(c^2+d^2)+i(ad+bc)/(c^2+d^2)$ olup $(ac-bd)/(c^2+d^2)$ ve $(ad+bc)/(c^2+d^2)$ birer rasyonel sayı olduklarından aranan kesir cismi $\mathbb{Q}[i]$ olur.

Soru 5) $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 24x^2 + 48 = 0$ denkleminde köklerin üçerli ve dörderli çarpımlarının toplamlarını elde ediniz. (20 puan)

İkinci, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerdekine benzer şekilde düşünürsek, -b/a köklerin (birerli çarpımlarının) toplamını, c/a ikişerli çarpımlarının toplamını, -d/a üçerli çarpımlarının toplamını, e/a dörderli çarpımlarının toplamını, -f/a beşerli çarpımlarının toplamını, vs vermektedir. Dolayısıyla istenen

$$(e-d)/a = (-24-0)/1 = -24$$

olur.

<u>Not:</u> *Süre 50 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***