

MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI.....

28.11.2023

No :.....

Soru 1) 8 köşeli basit bir grafta grafin boyutunun grafin mertebesine oranının alabileceği en büyük tamsayı değeri kaç olabilir?

Basit grafta m en fazla $n(n-1)/2$ olabilir. O halde sorulan m/n oranının en büyük değeri $(n-1)/2$ olur. Bu da $n = 8$ için 3,5 olur. Ancak en büyük tamsayı değer sorulduğundan cevap 3 olur.

Soru 2) 20 kenarlı ve 19 köşeli bir grafta tüm köşe derecelerinin 1, 2, 3, 5 veya 7 olduğu biliniyor. Derecesi 1 olan 13 tane, derecesi 2 olan 1 tane, derecesi 3 olan 2 tane köşe varsa derecesi 5 ve 7 olan köşelerin sayılarını bulunuz.

Kenar sayısının iki katı dereceler toplamıdır. Derecesi 5 olan a tane, 7 olan b tane köşe olsun. O halde

$$40 = 13 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + a \cdot 5 + b \cdot 7$$

ve buradan a ve b birer pozitif doğal sayı olduklarından $a = 1$, $b = 2$ olarak elde edilir.

Soru 3) Bağımsızlık sayısı 3 olan bir grafin mertebesi en az kaç olabilir? Bu hangi graftır?

Bağımsızlık sayısı 3 olan bazı bağlantılı graflar P_5 patika grafi, C_6 devir grafi, S_4 yıldız grafi şeklindedir ve bu grafların köşe sayıları sırasıyla 5, 6 ve 4'tür. Bu da bize yıldız grafin aranan ve en düşük köşe sayısına sahip graf olduğunu gösterir. Çünkü merkez köşe dışında tüm köşeler bağımsızlık sayısına katkı yaparlar. Ancak soruda bağlantılı denmediğinden üç köşeli sıfır grafinin bağımsızlık sayısı da 3 olur ve mertebesi 3'tür.

Soru 4) W_6 tekerlek grafinin tümleyenini çizerek bağımsızlık sayısını bulunuz.

Aranan tümleyen grafi 5 köşeli bir yıldız ile bir tek köşe şeklindedir ki bu da 5 köşeli bir devir grafi ile bir tek köşenin birleşimine izomorftur. Bu grafin bağımsızlık sayısı da 3'tür. Çünkü 5 köşeli devir grafi üzerinde birbirine komşu olmayan en çok iki köşe vardır ve ayrıca tek başına duran köşe de hiçbir köşeye komşu değildir.

Soru 5) $T_{7,3}$ larva grafinin herhangi iki köşesini bir kenar ile birleştirdiğimizde oluşacak grafin kutuplaşma sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

Verilen graftaki en büyük tam grafin mertebesi soruluyor. Bir larva grafinde herhangi iki köşeyi birleştirdiğimizde bir K_4 grafi elde edilemeyeceği açıktır. K_3 grafinde gelince bu bir üçgendir ve bir çok yolla, örneğin devir kısmı üzerinde komşu olmayan iki köşeyi veya patika üzerindeki bir köşe ile devir üzerindeki bir köşeyi bir kenarla birleştirerek, elde edilebilir. O halde kutuplaşma sayısı 3 olabilir. Devir veya patika kısmı üzerindeki komşu iki köşeyi birleştirdiğimizde ise grafta bir üçgen elde edemeyiz. Yani grafin içereceği en büyük tam graf K_2 olur ve kutuplaşma sayısı 2 olabilir. Sonuçta aranan cevap 2 veya 3 olur.

Süre 40 dakikadır. Başarılar.

inc