

MAT 4100 GALOIS TEORİSİ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

28.06.2022

No :.....

Soru 1) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 1 = 0$ denkleminin çözümünde kullanılan üçüncü dereceden yardımcı denklemi elde ediniz. (20 puan)

x yerine $x-1$ konulursa $x^4 - 11x^2 + 18x - 9 = 0$ düşürülmüş polinomu elde edilir. Bu polinomu $(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$ şeklinde çarpanlara ayırırsak $m+l-k^2 = -11$, $k(m-l) = 18$ ve $lm = -9$ elde edilir. İlk iki denklemden $m=(k^2+q+r/k)/2$ ve $l=(k^2+q-r/k)/2$ elde edilir ve bu sonuncu denklemde yerine konursa $k^6 - 22k^4 + 157k^2 - 324 = 0$ ve buradan da $t^3 - 22t^2 + 157t - 324 = 0$ üçüncü derece denklemi elde edilir.

Soru 2) $x^5 - 6x^3 + 11$ polinomunun düşürülmüş polinomunu elde ediniz. (20 puan)

Polinom beşinci dereceden olduğundan düşürülmüşü dördüncü dereceden terim bulundurmaz. Verilen polinom bu nedenle zaten düşürülmüştür.

Soru 3) $GF(27)$ cismini oluşturmada kullanılacak tüm indirgenemez polinomları bulunuz. (20 puan)

$GF(3) = \{0,1,2\}$ cisminin üçüncü dereceden bir genişlemesi bize $GF(27)$ cismini verir. Bizden istenen tüm üçüncü dereceden indirgenemeyen polinomları bulmamızdır. Bu polinomu x^3+ax^2+bx+c ile gösterirsek ve a,b ve c katsayılarının $GF(3)$ 'ten alınabileceğini hatırlarsak aranan polinomların x^3+2x+1 , x^3+2x+2 , x^3+x^2+2 , x^3+2x^2+1 , x^3+x^2+x+2 , x^3+x^2+2x+1 ve x^3+2x^2+x+1 olduğu görülür.

Soru 4) Yedinci dereceden dögüsel polinom olan $(x^7-1)/(x-1)$ polinomunun $Q[x]$ halkasında indirgenebilirliğini inceleyiniz. (20 puan)

Teoreme göre p asal iken p -inci dögüsel polinomun indirgenemez olduğunu biliyoruz. Çünkü x yerine $x+1$ konularak elde edilen polinomun indirgenemez oluşu p -inci dögüsel polinomun indirgenemezliğine denk olduğundan Eisenstein kriteri bize sonucu verir.

Soru 5) Beşinci dereceden bir polinomda köklerin dörderli çarpımlarının toplamını elde ediniz. (20 puan)

$P(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 ve x_5 ise

$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$ yazılabilir. Buradan parantezler açıldığında

$P(x) = a[x^5 - (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)x^4 +$

$(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4$

$+x_3x_5+x_4x_5)x^3 -$

$(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_1x_4x_5$

$+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5)x^2 +$

$(x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5$

$+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5)x - x_1x_2x_3x_4x_5]$

$= 0$

elde edilir. Köklerin dörderli çarpımlarının toplamı

x içeren terimin katsayısı olduğundan

$x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5=e/a$

elde edilir.

Not: Süre 40 dakikadır. Başarılar. İNC