MAT 4100 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI………. **07.06.2022**

No :...

Soru 1) $2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 27x^2 + mx - n$ polinomunun Eisenstein kriterine göre Q üzerinde indirgenemez olabilmesi için m ve n sayılarının alabileceği değerleri belirleyiniz. (20 puan)

9, 12 ve 27'yi bölen tek asal sayı 3 olduğundan m ve n'nin de 3 ile bölünmesi gerekir. Ayrıca sabit terim olan n'in $3^2 = 9$ ile bölünememesi gerekir.

Soru 2) $x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x + 11$ polinomunun düşürülmüş polinomunu elde ediniz. (20 puan)

x yerine $x-(-4)/5 = x+4/5$ yazılırsa uzun işlemlerden sonra x^4'lü terim kalmayacaktır: Sonuçta düşürülmüş polinom $x^5 + 126/5\, x^3 - 202/25\, x^2 + 264/25\, x - 24/25$ olur.

Soru 3) GF(8) cisminin elemanlarını belirleyerek tersi kendisine eşit olmayan tüm elemanları bulunuz. (20 puan)

$8 = 2^3$ olduğundan $Z_2 = \{0,1\}$ cismini derecesi 3 olan indirgenemez bir polinomla genişletilmek gerekir. $x^3 + x + 1$ polinomu, x yerine ne 0 ne de 1 yazıldığında 2 modunda 0 olmadığından bu polinom Z_2 üzerinde indirgenemezdir. α, bu polinomun bir kökü olsun. O halde $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$ demektir. Böylece $GF(8) = \{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a, b, c \in Z_2\} = \{0, 1, \alpha, 1+\alpha, \alpha^2, 1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2\}$ olur. 1'in tersi her zaman kendisidir. 0'ın tersi zaten mevcut değildir. İşlemler yapıldığında α'nın tersinin $1+\alpha^2$; α^2'nin tersinin $1+\alpha+\alpha^2$; $1+\alpha$'nın tersinin de $\alpha+\alpha^2$ olduğu görülür.

Soru 4) $x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 4$ polinomunun Q[x] halkasında indirgenebilirliğini inceleyiniz. (20 puan)

5, 10 ve 4'ü aynı anda bölen bir asal sayı olmadığından Eisenstein kriteri kullanılamaz. O halde n modunda indirgemeyi kullanabiliriz. İlk olarak lineer çarpanları deneyelim. Mod 2'de 0 ve 1 birer köktür ve lineer çarpan vardır. Mod 3'te 0, 1 ve 2 kök olmayıp lineer çarpan yoktur. Verilen polinom 5-inci dereceden olduğundan ikinci ihtimal ikinci ve üçüncü dereceden iki çarpanın varlığıdır. $x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 4 = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e)$ yazılır ve 3 modunda tüm ihtimaller denenerek uygun a, b, c, d ve e sayılarının bulunamadığı görülür ve sonuç olarak bu polinom mod 3'te ve dolayısıyla Q üzerinde indirgenemezdir.

Soru 5) Dördüncü dereceden bir polinomda köklerin üçerli çarpımlarının toplamını elde ediniz. (20 puan)

$P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ polinom denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 ise

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

yazılabilir. Buradan parantezler açıldığında

$$\begin{aligned} P(x) = a[&x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 \\ &+ (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2 \\ &- (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x \\ &+ x_1x_2x_3x_4] \\ = 0& \end{aligned}$$

elde edilir. Köklerin üçerli çarpımlarının toplamı x içeren terimin katsayısı olduğundan

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 = -d/a$$

elde edilir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***