MAT 1002 ANALİZ II Bütünleme Soruları

Öğrenci No : ....

Adı-Soyadı : CEVAP ANAHTARI

02.07.2019

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\int_0^{\pi} \frac{sinx}{1+cosx}dx$ integralini hesaplayınız. (20 puan)

π noktasında fonksiyon tanımsız old.dan integral has olmayan integraldir.

$$\lim_{b\to\pi} \int_0^b \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \lim_{b\to\pi} \int \frac{-du}{u}$$

$1+\cos x = u$

$-\sin x\, dx = du$

$$= \lim_{b\to\pi} -\ln|u| \Big|$$

$$= \lim_{b\to\pi} -\ln|1+\cos x| \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\pi} -\ln(1+\cos b) + \ln 2$$

$$= \underbrace{-\ln(0)}_{\infty} + \ln 2 = \infty$$

(ıraksak) //

2. $\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}dx$ integralini hesaplayınız. (20 puan)

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^2+4 & x^2+2x+1 \\ \hline -x^4+2x^3+x^2 & x^2-2x+6 \\ \hline -2x^3+2x^2+4 & \\ -\,-2x^3-4x^2-2x & \\ \hline 6x^2+2x+4 & \\ -\,6x^2+12x+6 & \\ \hline -10x-2 & \end{array}$$

$$= \int x^2-2x+6 - \frac{10x+2}{x^2+2x+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 6x - 2\int \frac{5x+1}{x^2+2x+1}dx$$

$$\frac{5x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \to 5x+1 = A(x+1)+B$$

$A=5$ $A+B=1$

$B=-4$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 6x - 2\left(\int \frac{5}{x+1}dx - \int \frac{4}{(x+1)^2}dx\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 6x - 10\ln|x+1| - 8(x+1)^{-1} + C_{//}$$

3. $f(x) = \ln(1-x)$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz. (20 puan)

$$f(x) = \ln(1-x) \to f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} \to f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \to f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^3} \to f'''(0) = -2$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{-6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{-6}{(1-x)^4} \to f^{(IV)}(0) = -6$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \frac{f^{(IV)}(a)}{4!}\cdot(x-a)^4 + \dots$$

Maclaurin → $a=0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!}\cdot x^4 + \dots$$

$$f(x) = 0 - 1\cdot x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \dots$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x^k}{k}_{//}$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{5k}}{5^{2k}}\left(\frac{x}{3}\right)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. (20 puan)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{\cancel{5k}+5}\, x^{\cancel{k+1}}}{5^{2k+2}\, 3^{\cancel{k+1}}}\cdot\frac{5^{2k}\cdot 3^{\cancel{k}}}{\cancel{x^k}\cdot \cancel{2^{5k}}}\right|$$

$$= \left|\frac{2^5 . x}{5^2 . 3}\right| = \left|\frac{2^5}{5^2 . 3}\right| . |x|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^5}{5^2 . 3}\right| . |x| = \frac{2^5}{5^2 . 3}\,|x| < 1$$

ise seri yakınsaktır $|x| < \frac{75}{32}$

$$-\frac{75}{32} < x < \frac{75}{32}$$

$|x| > \frac{75}{32}$ ise seri ıraksaktır

$|x| = \frac{75}{32}$ ise $\to x = -\frac{75}{32}$

$\to x = \frac{75}{32}$

$$x=-\frac{75}{32} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32^k}{25^k}\cdot\frac{(-25)^k}{(32)^k} = \sum_{k=1}(-1)^k$$

alterne seri

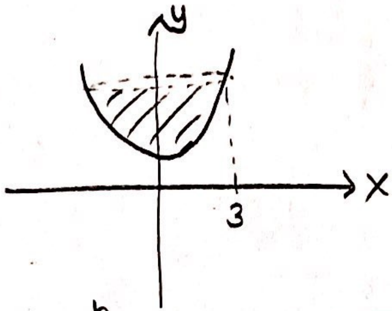
$$x=\frac{75}{32} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32^k}{25^k}\cdot\frac{25^k}{32^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

(ıraksak)

O halde serinin yakınsaklık aralığı

$$-\frac{75}{32} < x < \frac{75}{32} \quad //$$

5. $y = x^2+1$ eğrisinin $[0,3]$ aralığında y ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanını bulunuz. (20 puan)



$$S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$f(x) = x^2+1$

$f'(x) = 2x$

$$S = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$1+4x^2 = t^2$

$8x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = \frac{t\,dt}{4}$

$$= 2\pi\int \frac{t}{4} . t\,dt = 2\pi \frac{t^3}{12}\Big|$$

$$= \frac{\pi}{6}.(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^3$$

$$= \frac{\pi}{6}.(1+36)^{3/2} - \frac{\pi}{6} . 1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(37^{3/2}-1\right) \quad //$$

Sınav süresi 70 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL, Elif KIZILDERE