

## MAT3020 SOYUT CEBİR 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI.....

24.04.2018

No:.....

**Soru 1)  $n > 3$  çift iken  $D_n$  dihedral grubunun merkezini belirleyiniz.**

$D_n \cong \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  olsun.  $k$  bir tamsayı olmak üzere  $n = 2k$  yazalım.  $D_{2k} \cong \langle a, b \mid a^{2k} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{2k-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{2k-1}b\}$  olur.  $ab \neq ba$  olup  $a$  ve  $b$ , merkezde olamaz. Benzer şekilde  $a^2b = ba^{2k-2}$ ,  $a^3b = ba^{2k-3}$ , ...,  $a^{k-1}b = ba^{k+1}$  olup  $a^2, a^3, \dots, a^{k-1}, a^{k+1}, \dots, a^{2k-1}$  elemanları da merkezde olamaz.  $a^k b = ba^k$  olup  $a^k$  elemanı diğer tüm elemanlar ile yer değiştirebildiğinden ve diğer yansımalar da en az bir elemanla yer değiştiremediğinden  $M(D_{2k}) = \{e, a^k\}$  olur.

**Soru 2)  $n$  tek iken  $D_n$  dihedral grubunun kamutatör alt grubunu belirleyiniz.**

$D_n \cong \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  olsun.  $k$  bir tamsayı olmak üzere  $n = 2k+1$  yazalım.  $D_{2k+1} \cong \langle a, b \mid a^{2k+1} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{2k}, b, ab, a^2b, \dots, a^{2k}b\}$  olur. İlk olarak tüm kamutatör elemanlarının yön koruyan elemanlar olduğunu ve bu nedenle yansımaların kamutatör elemanı olamayacağını biliyoruz.  $ab = ba^{2k}$  olduğunu hatırlayalım.  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = aba^{2k}b = a^2$ ;  $[a, ab] = a^2ba^{2k}ba^{2k} = a^2$ ;  $[a^2, b] = a^2ba^{2k-1}b = a^3ba^{2k}b = a^4b^2 = a^4$ ; ... elde edilir. Bu şekilde devam edilerek  $a$ 'nın diğer kuvvetlerinin de kamutatör alt grubunda olduğu görülür. (Aslında  $n$  tek iken  $a^2$ 'nin  $D_n$ ' kamutatör alt grubunda kalması, kapalılık gereği  $a$ 'nın tüm kuvvetlerinin de  $D_n$ ' alt grubunda kalmasını gerektirir). O halde  $D_n' = \{e, a, a^2, \dots, a^{2k}\}$  olur.

**Soru 3)  $D_{10}$  dihedral grubunda  $a$  elemanı 10. mertebeden ise  $D_{10}$  grubunun  $\langle a^4 \rangle$  alt grubu ile bölüm grubununun mertebesini belirleyiniz.**

$D_{10} \cong \langle a, b \mid a^{10} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  olsun.  $\langle a^4 \rangle = \{a^4, a^8, a^2, a^6, e\} \cong C_5$  olur.  $D_{10}$  grubu 20 elemanlı olduğundan bölüm grubu  $20/5 = 4$  elemanlıdır.

**Soru 4) Değişmeli bir  $G$  grubunun merkezi  $M(G)$  ile bölüm grubunu belirleyiniz.**

Değişmeli bir grubun merkezi grubun tamamıdır. O halde  $G/M(G) = G/G = \{e\} \cong C_1$  olur.

**Soru 5)  $C_{12} \cong \langle a \rangle$  ise  $C_{12}$  grubunun  $a^2, a^4$  ve  $a^6$  elemanlarını bulunduran en küçük alt grubu ile bölüm grubunu oluşturunuz.**

$a^2, a^4$  ve  $a^6$  elemanlarını bulunduran bir alt grup kapalılık gereği  $a^8, a^{10}$  ve  $a^{12}=e$  elemanlarını da bulundurur. Bunun dışındaki elemanlar alt grupta bulunmak zorunda değildir. O halde bu elemanları bulunduran en küçük alt grup  $\{a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, e\} \cong C_6$  olur.

**Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC**