MAT 3019 SAYILAR TEORİSİ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI…....... **08.01.2018**

No :...

Soru 1) Sadece pergel ve cetvel kullanılarak bir düzgün 8160-genin çizilip çizilemeyeceğini açıklayınız.

$8160 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$'dir. Gauss teoremi gereği 8160'ın tek asal çarpanlarının farklı Fermat asalları olması durumunda bir düzgün 8160-geni sadece pergel ve cetvel kullanarak çizebileceğimizi biliyoruz. 3, 5 ve 17 ilk üç Fermat asalı olduklarından istenen çokgen çizilebilir.

Soru 2) p asal sayı ise $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \ (p)$ olduğunu gösteriniz.

p asal sayı iken p sayısının i = 0 ve i = p durumları hariç tüm $\binom{p}{i}$ Binom sayılarını böldüğünü biliyoruz. Yani Binom açılımı yapıldığında ilk ve son terim hariç aradaki diğer tüm terimlerin katsayıları $\binom{p}{i}$ sayıları olacağından bunların tümü p ile bölünebilirdir ve p modunda 0 olurlar. Yani geriye ilk ve son terimler kalır. $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$ olduğundan

$$(a + b)^p \equiv \binom{p}{0}a^p + \binom{p}{p}b^p \ (p) \equiv a^p + b^p \ (p)$$

olur.

Soru 3) p asalı için $a^2 \equiv b^2 \ (p)$ iken $a \equiv b \ (p)$ veya $a + b \equiv 0 \ (p)$ olduğunu gösteriniz.

Denklik tanımı gereği $a^2 \equiv b^2 \ (p)$ olması $p|(a^2-b^2)$ olması anlamına gelir. Bu denk olarak $p|(a-b)(a+b)$ şeklinde yazılabilir. p asal olduğundan bu da $p|(a-b)$ veya $p|(a+b)$ olması gerektiğine denktir. Denklik tanımı gereği birinci ifadeden $a \equiv b \ (p)$, ikinci ifadeden de $a \equiv -b \ (p)$ veya istenen şekilde $a+b \equiv 0 \ (p)$ olması gerektiği görülür.

Soru 4) 29'un katlarının 2 eksikleri arasında bir dördüncü kuvvet bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

Her dördüncü kuvvet aynı zamanda bir tam kare olduğundan sorulan soruyu cevaplayabilmek için $\left(\frac{-2}{29}\right)$ Legendre sembolünü hesaplamalıyız. Denk olarak 3, 8 modunda -1 ya da 1'e denk olmadığından

$$\left(\frac{-2}{29}\right) = \left(\frac{27}{29}\right) = \left(\frac{3^3}{29}\right) = \left(\frac{3}{29}\right)^3 = \left(\frac{3}{29}\right)$$

$$= \left(\frac{29}{3}\right)(-1)^{14 \cdot 1} = \left(\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

bulunur. Yani 29'un katlarının 2 eksikleri arasında bir tam kare yoktur. O halde bu sayılar arasında bir dördüncü kuvvet de bulunamaz.

Soru 5) 151'in tamsayı katlarına 47 eklediğimizde elde edilen arasında tam kare bulunup bulunmadığını belirleyiniz.

Sorulan soruyu cevaplayabilmek için $\left(\frac{47}{151}\right)$ Legendre sembolünün değerini hesaplamalıyız. 151 ve 47 birer tek asal sayıdır. O halde $151 \equiv 10 \ (47)$ ve $47 \equiv -1 \ (8)$ olduğundan 2'nin, 47 modunda bir tam kare olduğunu ve $5 \equiv -3 \ (8)$ olduğundan 2'nin, 5 modunda bir tam kare olmadığını hatırlarsak

$$\left(\frac{47}{151}\right) = \left(\frac{151}{47}\right)(-1)^{75 \cdot 23} = -\left(\frac{151}{47}\right) = -\left(\frac{10}{47}\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{47}\right)\left(\frac{5}{47}\right) = -(+1)\left(\frac{5}{47}\right) = -\left(\frac{5}{47}\right)$$

$$= -\left(\frac{47}{5}\right)(-1)^{23 \cdot 2} = -\left(\frac{47}{5}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= -(-1) = 1$$

elde edilir. Yani 151'in tamsayı katlarına 47 eklendiğinde tam kareler elde edilebilir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc+ay***