

MAT3020 SOYUT CEBİR 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

09.05.2017

No:.....

Soru 1) 16 elemanlı dihedral grubun merkezini bularak bölüm grubunun kaç elemanlı olduğunu hesaplayınız ve kosetlerini bulunuz.

16 mertebeli dihedral grup

$$D_8 \cong \langle a, b \mid a^8 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

grubudur. Merkezi, elemanlar tek tek denendiğinde $M(D_8) = \{e, a^4\}$ altgrubudur. Merkez normal altgrup olduğundan bölüm grubu oluşturulabilir. Bölüm grubu $16/2 = 8$ elemanlıdır. Kosetler

$$M(D_8) = \{e, a^4\}, M(D_8)a = \{a, a^5\}, M(D_8)a^2 = \{a^2, a^6\}, \\ M(D_8)a^3 = \{a^3, a^7\}, M(D_8)b = \{b, a^4b\}, M(D_8)ab = \{ab, a^5b\}, \\ M(D_8)a^2b = \{a^2b, a^6b\} \text{ ve } M(D_8)a^3b = \{a^3b, a^7b\}$$

şeklindedir.

Soru 2) C_{35} devirli grubunun hangi mertebelerden kaçar tane elemanı bulunduğunu belirleyiniz.

$35 = 5 \cdot 7$ 'dir. Devirli bir grubun mertebesini bölen her d doğal sayısı için d mertebeli bir tek altgrubu olduğu biliniyor. O halde altgrupların mertebeleri 1, 5, 7 veya 35 olabilir. 1 mertebeli tek eleman etkisiz elemandır. 35 mertebeli elemanlar üreticilerdir ve bunlar

$$\varphi(35) = (5-1)(7-1) = 4 \cdot 6 = 24$$

tanedir. Geriye kalan 10 eleman 5 veya 7 mertebelidir. Eğer bu grubun bir üretici a ise,

$a^7, a^{14}, a^{21}, a^{28}$ elemanları 5. mertebeden;

$a^5, a^{10}, a^{15}, a^{20}, a^{25}$ ve a^{30} elemanları 7. mertebededir.

Soru 3) $C_{36} \cong \langle a \rangle$ devirli grubunun a^{14} elemanı ile üretilen altgrubunu belirleyip bölüm grubunun hangi grup olduğunu bulunuz.

a^{14} elemanının mertebesini bulalım.

$$(a^{14})^2 = a^{28} \neq e, \quad (a^{14})^3 = a^6 \neq e, \quad (a^{14})^4 = a^{20} \neq e, \\ (a^{14})^5 = a^{34} \neq e, \quad (a^{14})^6 = a^{12} \neq e$$

olup

$$((a^{14})^6)^3 = (a^{12})^3 = a^{36} = e$$

olacağından a^{14} elemanının mertebesi 18 olur. O halde üreteceği altgrup C_{18} devirli grubudur. Bölüm grubu ise $C_{36}/C_{18} \cong C_2$ grubudur.

Soru 4) $D_{12} \cong \langle x, y \mid y^{12} = x^2 = (yx)^2 = e \rangle$ grubunda xyx^3y^3 elemanının mertebesini hesaplayınız.

Burada x 'in bir yansıma ve y 'nin bir dönme dönüşümü olduğuna dikkat ediniz! Ayrıca

$$xyx^3y^3 = xyxy^3$$

olduğu da $x^2 = e$ olduğundan görülür. $(yx)^{-1} = yx$ olup $xy^{11} = yx$ elde edilir. Böylece

$xyxy^3 = xxy^{11}y^3 = y^2$ olup $y^{12} = e$ olduğu bilindiğinden $xyxy^3$ elemanı 6. mertebededir.

Soru 5) N, G grubunun bir normal altgrubu ve $a \in G$ olsun. $|Na| = k$ ise, G grubunun mertebesinin k ile bölünüp bölünmeyeceğini tartışınız.

Teorem gereği tüm kosetlerin mertebeleri birbirine eşittir ve bu sayı (k) aynı zamanda altgrubun mertebesidir. Lagrange teoremi gereği altgrupların mertebeleri grubun mertebesini böleceğinden k, G grubunun mertebesini bölecektir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**