

Öğrenci No :

Adı, Soyadı :

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ serisinin yakınsaklığını ya da iraksaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

⋮

$$S_m = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right)$$

$$\geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ tane}}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_m \geq \lim_{m \rightarrow \infty} m = \infty$$

\Rightarrow Verilen seri iraksaktır.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$ integralini hesaplayınız.

Has olmayan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x-2)(x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)} = I$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x-2)(x-1)} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln \left(\frac{x-2}{x-1} \right) \right) \Big|_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\ln 2 - \ln \left(\frac{a-2}{a-1} \right) \right] = \ln 2$$

3. $\int \sin x \ln(\tan x) dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemini kullanarak hesaplayınız.

$$u = \ln(\tan x) \Rightarrow du = \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int \sin x \ln(\tan x) dx = -\cos x \ln(\tan x) + \int \frac{dx}{\sin x}$$

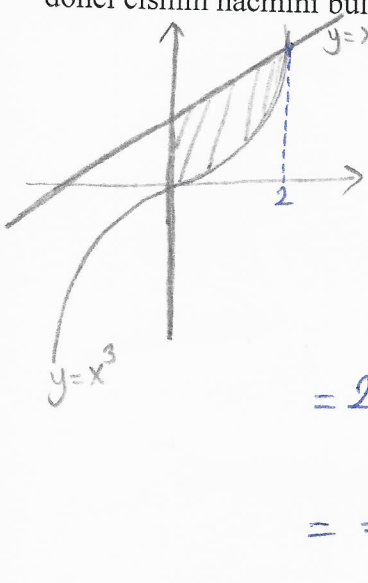
$$= -\cos x \ln(\tan x) + \int \operatorname{cosec} x dx$$

$$= -\cos x \ln(\tan x) + \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

4. $\frac{1+9}{25} + \frac{1+27}{125} + \frac{1+81}{625} + \dots$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+3^n}{5^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{20} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{25} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{9}{25}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{9}{10} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+3^n}{5^n} &= \frac{1}{20} + \frac{9}{10} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

5. $y=x^3$, $y=x+6$, $x=0$ eğrileri arasında kalan bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$$\begin{aligned} x+6 &= x^3 \\ x^3 - x - 6 &= 0 \\ x &= 2 \\ V &= 2\pi \int_0^2 x(x+6-x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (x^2 + 6x - x^4) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \frac{248\pi}{15} \end{aligned}$$

6. $y = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{a^2}{4x}$ eğrisinin $x=a$ ve $x=2a$ absisli noktaları arasında kalan

a) s yayının uzunluğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{4x^2}, \quad 1+(y')^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{4x^2}\right)^2 \\ s &= \int_a^{2a} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_a^{2a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{4x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3a^2} - \frac{a^2}{4x} \right]_a^{2a} = \frac{59}{24} a \end{aligned}$$

b) bu yayın y -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} S_y &= 2\pi \int_a^{2a} x \sqrt{1+(y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_a^{2a} x \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{4x^2}\right) dx \\ &= 2\pi \int_a^{2a} \left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{a^2}{4x}\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4a^2} + \frac{a^2}{4} \ln x \right]_a^{2a} \\ &= \frac{\pi a^2}{2} (15 + \ln 2) \end{aligned}$$

İlk beş soru 15'er son soru 30 puan olup sınav süresi 80 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş