MAT3020 SOYUT CEBİR 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :…CEVAP ANAHTARI…...... 17.05.2016

No:…………...

Soru 1) G bir grup ve $H < G$ olsun. H'ın G'deki indeksi 3 olsun. H normal altgrup olabilir mi?

Evet olabilir. Örneğin değişmeli bir G grubunun tüm altgrupları normal altgruptur. Ancak 3 indeksli her altgrup normal olmak zorunda değildir. Örneğin $S_3 \cong \langle a,b\rangle$ simetrik grubunun $\{e,b\}$ altgrubu 3 indeksli olup sol ve sağ kosetleri birbirine eşit olmadıklarından normal değildir. Ancak 2 indeksli altgrupların normal oldukları garanti söylenebilir.

Soru 2) C_3 devirli grubunun S_4 simetrik grubundaki indeksini bulunuz.

$|C_3| = 3$ ve $|S_4| = 4! = 24$ olduğundan C_3 altgrubunun S_4 grubundaki indeksi $24/3 = 8$ olur.

Soru 3) A_2 alterne grubunun S_3 simetrik grubundaki indeksini bulunuz. Bölüm grubunu ve kosetleri belirtiniz.

$A_2 < S_2$ olduğunu tanımlarından biliyoruz. Yine $S_2 < S_3$ olduğu da biliniyor. Dolayısıyla $A_2 < S_3$ olur. Ayrıca $|A_2| = 2!/2 = 1$ ve $|S_3| = 3! = 6$ olup sorulan indeks $|S_3/A_2| = 6/1 = 6$ olacaktır. A_2 tek elemanlı olduğundan $C_1 \cong \{e\}$ devirli grubuna izomorftur. Bu durumda bölüm grubu $S_3/A_2 \cong S_3/C_1 \cong S_3$ olur. Kosetler ise eA_2, aA_2, a^2A_2, bA_2, abA_2 ve a^2bA_2'dir.

Soru 4) $f: G \to G$, $f(x) = g^{-2}xg^2$ dönüşümünün türünü belirleyiniz. Çekirdeğini hesaplayınız.

$$f(xy) = g^{-2}xyg^2 = g^{-2}xg^2g^{-2}yg^2 = f(x)f(y)$$

olduğundan işlem korur.

$f(x) = f(y)$ iken $g^{-2}xg^2 = g^{-2}yg^2$ olup $x = y$ olduğu açıktır. Yani f 1:1'dir. Her $y \in G$ için

$$f(g^2yg^{-2}) = g^{-2}(g^2yg^{-2})g^2 = y$$

olup f örtendir. Yani f bir izomorfizmdir. Çekirdeği de

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{x \in G : f(x) = e\} \\ &= \{x \in G : g^{-2}xg^2 = e\} \\ &= \{x \in G : x = e\} \\ &= \{e\} \end{aligned}$$

olur. Zaten f, 1:1 olduğundan çekirdeği tek elemanlı olmalıdır.

Soru 5) $C_{24} \cong \langle a\rangle$ devirli grubunun altgruplarını bulup altgrup tablosunu yapınız. $\langle a^7\rangle$ ve $\langle a^{10}\rangle$ altgruplarını bulunuz. $C_{24}/\langle a^7\rangle$ ve $C_{24}/\langle a^{10}\rangle$ bölüm gruplarını ve elemanlarını belirleyiniz.

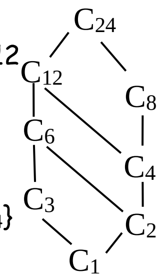
C_{24} devirli grubunun, 24'ün herbir d pozitif böleni için bir C_d altgrubu vardır. Yani tüm altgrupları C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_8, C_{12} ve C_{24}'dür. Altgrup tablosu da aşağıda verilmiştir. $(7,24) = 1$ olduğundan $\langle a^7\rangle \cong C_{24}$; $(10,24) = 2$ ve $24/2 = 12$ olduğundan $\langle a^{10}\rangle \cong C_{12}$ olur. Dolayısıyla

$C_{24}/\langle a^7\rangle \cong C_{24}/C_{24} \cong C_1 \cong \{eC_{24}\}$

ve

$C_{24}/\langle a^{10}\rangle \cong C_{24}/C_{12} \cong C_2 \cong \{eC_{24}, a^{12}C_{24}\}$

olur.



Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**