

MAT3020 SOYUT CEBİR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI.....

13.04.2016

No:.....

Soru 1) G bir grup, $H < G$ ve $g \in G$ olsun.
 $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$
kümesinin G 'nin bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

$a, b \in gHg^{-1}$ olsun. İlk olarak $ab \in gHg^{-1}$ olduğunu gösterelim. Tanım gereği $h, h' \in H$ olmak üzere $a = ghg^{-1}$ ve $b = gh'g^{-1}$ yazılabilir. O halde $ab = ghg^{-1}gh'g^{-1} = ghgh'g^{-1}$ olur. Burada H bir altgrup olduğundan $hh' \in H$ olup böylece $ab \in H$ elde edilir. Benzer şekilde $a^{-1} \in H$ olduğu da gösterilir. Yani $gHg^{-1} < G$ elde edilir.

Soru 2) Bir kamutatörün tersinin de bir kamutatör olup olmadığını inceleyiniz.

$x = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ olsun. O halde

$$x^{-1} = [a,b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [ba]$$

olup yine bir kamutatördür.

Soru 3) $n < m$ iken $A_n < A_m$ olup olmadığını inceleyiniz.

A_n , $n!/2$ elemanlı bir gruptur ve sonludur. Çift permütasyonlardan oluştuğundan aynı zamanda kapalıdır. Kapalı ve sonlu her altküme bir alt grup olduğundan $A_n < A_m$ olur.

Soru 4) G bir grup ve $H < G$ olsun. H 'in G 'nin normal altgrubu olması için gerek ve yeter şartın her $g \in G$ için $g^{-1}H = Hg^{-1}$ olup olmadığını tartışınız.

H 'in G 'nin normal altgrubu olması için gerek ve yeter şartın her $g \in G$ için $gH = Hg$ olması olduğunu biliyoruz. Bu her g elemanı için doğru olduğundan g^{-1} elemanları için de doğrudur.

Soru 5) $f:G \rightarrow G'$ bir epimorfizm olsun. G değişmeli ise G' grubunun da değişmeli olduğunu gösteriniz.

f bir epimorfizm ise $f(G) = G'$ olduğu biliniyor. $a, b \in G$ iken $ab = ba$ olduğu veriliyor. $x, y \in G' = f(G)$ alalım. Bu durumda $x = f(a)$ ve $y = f(b)$ şeklindedir. O halde f bir homomorfizm ve G değişmeli olduğundan

$$xy = f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a) = yx$$

olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC