

MAT3019 SAYILAR TEORİSİ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI.....

02.02.2016

No :.....

Soru 1) Hangi a asal sayıları için $\left(\frac{a}{5}\right) = \left(\frac{5}{a}\right)$

olduğunu belirleyiniz.

Çözüm. a asal olsun. Ya $a = 2$ 'dir, ya da a bir tek asal sayıdır. $a = 2$ ise $\left(\frac{2}{5}\right) = -1$ ve $\left(\frac{5}{2}\right) = 1$ olup 2

için bu özellik doğru değildir. İkinci olarak a , 5'ten farklı bir tek asal sayı ise $a-1$ çift sayı olacağından

$\left(\frac{a}{5}\right) = \left(\frac{5}{a}\right) (-1)^{\frac{a-1}{2}} = \left(\frac{5}{a}\right)$ olur. Özel olarak $a = 5$

olması durumunda iki sayı da 0 olup yine eşitlik sağlanır.

Soru 2) U_{25} 'in bir ilkel kökünü bularak, Q_{25} kümesindeki tüm elemanları belirleyiniz.

Çözüm. $g = 2$ 'nin bir ilkel kök olduğunu kolayca görebiliriz. O halde Q_{25} 'in elemanları, $g = 2$ sayısının 25 modundaki çift kuvvetleridir. Yani 4, 16, 14, 6, 24, 21, 9, 11, 19 ve 1'dir.

Soru 3) Hiçbir Fermat sayısının iki asalın toplamı olarak yazılamayacağını gösteriniz.

Çözüm. $m > 0$ için F_m sayılarının tek olduğunu biliyoruz. Eğer F_m iki asalın toplamı olsaydı bu asallardan birisinin 2 ve diğerinin de $F_m - 2$ olacağı açıktır. Ancak $F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = (2^{2^{m-1}} - 1)(2^{2^{m-1}} + 1)$ yazılabileceğinden $m > 1$ iken $F_m - 2$ birleşik sayı olur. O halde böyle iki asal sayı bulunamaz.

Soru 4) $x^3 + x^2 - x + 1$ polinomunun tamsayı köklerinin var olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. $n = 2$ için mod 2'de 0'ın bir çözüm olmadığı açıktır. Ancak 1, bir çözüm olduğundan $n = 3$ 'ü denemeliyiz. 0, 1 ve 2 çözüm olmadığından verilen polinomun Z_3 'de çözümü yoktur. Dolayısıyla böyle bir n bulunabildiğinden Z 'de de çözüm yoktur.

Soru 5) $2x + 5y \equiv 3 \pmod{7}$ kongrüansının çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. $(2, 5, 7) = 1 \mid 3$ olduğundan çözüm vardır ve $2x \equiv 3 - 5y \pmod{7}$ kongrüansı denk olarak $2x \equiv 10 + 2y \pmod{7}$ şeklinde düşünülebilir. $(2, 7) = 1$ olup $x \equiv 5 + y \pmod{7}$ elde edilir. Bu durumda çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{(5, 0), (6, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ şeklinde bulunur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. *inc+ay*