MAT 1001 ANALİZ I Ara Sınav Soruları

Öğrenci No : 27.11.2015

Adı, Soyadı : ....

CEVAP ANAHTARI

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $f(x)=\dfrac{x}{2+\sec x}$ fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulunuz.

$$f(x)=\frac{x}{2+\sec x}=\frac{x}{2+\frac{1}{\cos x}}=\frac{x\cos x}{2\cos x+1}$$

$$2\cos x+1\neq 0 \Rightarrow \cos x\neq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x\neq \frac{2\pi}{3}+2k_1\pi,\ k_1\in\mathbb{Z}$$

$$x\neq \frac{4\pi}{3}+2k_2\pi,\ k_2\in\mathbb{Z}$$

Sürekli olduğu aralık

$$\mathbb{R}-\left\{\left\{\frac{2\pi}{3}+2k_1\pi \,\middle|\, k_1\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k_2\pi \,\middle|\, k_2\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$$

2. $y=\cos e^{xy}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$'i bulunuz.

$$y'=(-\sin e^{xy})\,e^{xy}\,(y+xy')$$

$$\Rightarrow y'=-ye^{xy}\sin e^{xy}-xy'e^{xy}\sin e^{xy}$$

$$\Rightarrow y'(1+xe^{xy}\sin e^{xy})=-ye^{xy}\sin e^{xy}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-ye^{xy}\sin e^{xy}}{1+xe^{xy}\sin e^{xy}}$$

3. $f(x)=\sec^2(\tan^2 x^4)$ ise $f'(x)$'i bulunuz.

$x^4=u$

$\tan u=v$

$v^2=m$

$\sec m=t$

$t^2=y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dm}\cdot\frac{dm}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2t.\sec m.\tan m.2v.\sec^2 u.4x^3$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=16x^3\sec^2(\tan^2x^4).\tan(\tan^2x^4).\tan x^4.\sec^2x^4$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(-x)\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

5. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonunun tüm yatay ve düşey asimptotlarını bulunuz.

$\sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}=\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}=\infty$

olduğundan $x=1$ ve $x=-1$ doğruları $f(x)$ fonksiyonu için düşey asimptottur.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}}=1$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}}=-1$$

olduğundan $y=1$ ve $y=-1$ doğruları da yatay asimptottur.

6. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+4)=3$ olduğunu limitin tanımı yardımıyla gösteriniz.

$\forall\varepsilon>0$ için $0<|x-1|<\delta$ olduğunda $|f(x)-3|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ bulmalıyız.

$$|x^2-2x+4-3|=|x^2-2x+1|=|(x-1)^2|$$
$$=|x-1|^2<\delta^2=\varepsilon$$
$$\Rightarrow \delta=\sqrt{\varepsilon}\ \left(\text{veya } \delta\leq\sqrt{\varepsilon}\right)$$

olarak alınırsa aranılan $\delta>0$ bulunmuş olur.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\to(\infty-\infty)$$

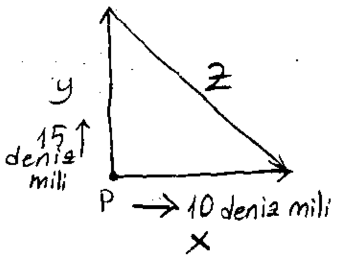
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}$$

$$=\frac{5}{2}$$

8. İki tanker bir P petrol platformundan uzaklaşmaktadır. Tankerlerden biri saat 12:00'da 10 deniz mili hızla doğuya doğru yol almaya başlıyor. Diğer tanker ise saat 13:00'da 15 deniz mili hızla kuzeye doğru yol almaya başlıyor. Saat 14:00'da iki gemi arasındaki mesafenin birbirlerine göre değişim oranı kaçtır?



$\frac{dx}{dt} = 10, \quad \frac{dy}{dt} = 15$

Saat 14:00'da

$x = 20$ mil

$y = 15$ mil ve dolayısıyla $z = 25$ mil olur.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\cancel{2}x \frac{dx}{dt} + \cancel{2}y \frac{dy}{dt} = \cancel{2}z \frac{dz}{dt}$$

$$20.10 + 15.15 = 25. \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 17 \text{ deniz mili/Saat}$$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x-2}$ limitini hesaplayınız.

$\frac{\pi}{x} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{t} \quad ; \quad x \to 2 \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x-2} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\frac{\pi}{t} - 2} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos t}{\pi - 2t}$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{\sin 2t}{2\sin t}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2\sin t} \frac{t}{\pi - 2t}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi - 2t)}{2\sin t} \frac{t}{\pi - 2t}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi - 2t)}{\pi - 2t} . \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}$$

$$\pi - 2t = k \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \to 0$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{k\to 0} \frac{\sin k}{k}}_{1} . \frac{\pi/2}{1}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

10. $f(x) = x(\ln x)^x$ fonksiyonunun grafiğinde, $x = e$ için elde edilen noktadaki teğetin denklemini bulunuz.

$m_t = f'(e)$ olduğundan

$$y' = (\ln x)^x + x\left[(\ln x)^x\right]'$$

$y_1 = (\ln x)^x$ denirse

$$\ln y_1 = x \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \ln(\ln x) + x \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$= \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow y_1' = (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

$$\Rightarrow y' = (\ln x)^x + x(\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

$$\Rightarrow m_t = y'\big|_{x=e} = 1 + e(0+1) = 1+e$$

$$x = e \Rightarrow f(e) = e$$

(e, e) noktasından geçen ve $m_t = 1+e$ olan teğet denklemi;

$$y - e = (1+e)(x-e)$$

$$\Rightarrow y = (1+e)x \cancel{-e} - e^2 \cancel{+e}$$

$$\Rightarrow y = (1+e)x - e^2$$

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Dr. Aysun Yurttaş