MAT 1002 ANALİZ II Bütünleme Sınav Soruları

Öğrenci No : 11.06.2015

Adı, Soyadı : .... **CEVAP ANAHTARI**

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

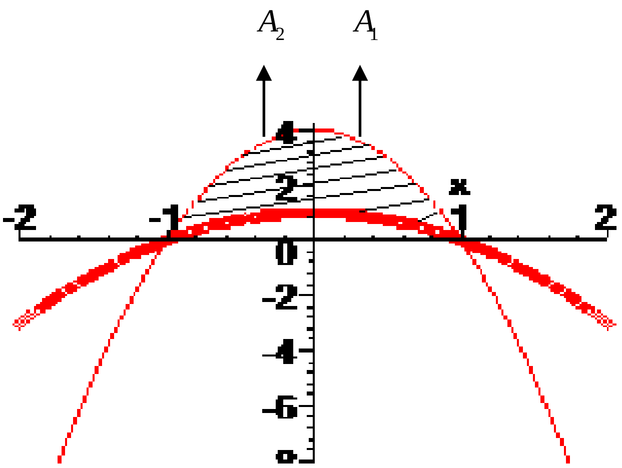
1. $y=4(1-x^2)$ ve $y=1-x^2$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. **(10p.)**

Önce verilen fonksiyonların eksenleri kestiği noktaları bulalım:

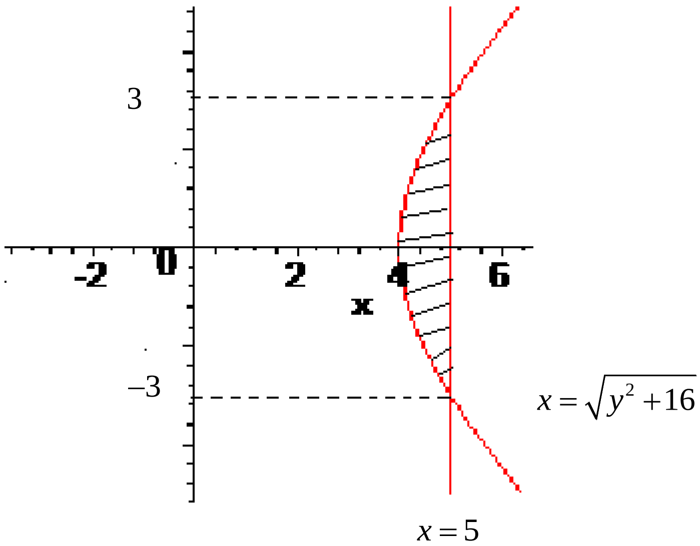
$$y=1-x^2=0 \Rightarrow x_1=1 \vee x_2=-1$$
$$y=4(1-x^2)=0 \Rightarrow x_1=1 \vee x_2=-1$$

$$A=A_1+A_2=2A_1=2A_2$$

$$A_1=\int_0^1\left[4-4x^2-(1-x^2)\right]dx$$
$$=\int_0^1(3-3x^2)dx=(3x-x^3)\Big|_0^1=3-1=2$$
$$A=2A_1=2\cdot 2=4br$$



2. $x^2-y^2=16$ ve $x=5$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin, y-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz. **(10p.)**



Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar:

$$x^2=y^2+16 \Rightarrow 25=y^2+16 \Rightarrow y=-3 \vee y=3$$

Ayrıca, $x=\sqrt{y^2+16}$ olarak yazılabilir.

$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left[5^2-(\sqrt{y^2+16})^2\right]dy$$
$$=\pi\int_{-3}^{3}\left[25-y^2-16\right]dy$$
$$=\pi\int_{-3}^{3}(9-y^2)dy$$
$$=\pi\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}$$
$$=\pi\left[\left(27-\frac{27}{3}\right)-\left(-27+\frac{27}{3}\right)\right]$$
$$=36\pi br^2$$

3. $\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

Verilen rasyonel ifadeyi basit kesirlere ayırabiliriz:

$$\frac{3x-1}{x(x^2-4)} = \frac{3x-1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$3x-1 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

$$x=0 \Rightarrow -1 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$
$$x=2 \Rightarrow 5 = 8B \Rightarrow B = \frac{5}{8}$$
$$x=-2 \Rightarrow -7 = 8C \Rightarrow C = -\frac{7}{8}$$

$$\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{5}{8}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{7}{8}\int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{5}{8}\ln|x-2| - \frac{7}{8}\ln|x+2| + C$$

bulunur.

4. $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

Önce belirsiz integrali hesaplayalım:

$I = \int e^{-x}\sin x dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$I = -e^{-x}\sin x + \underbrace{\int e^{-x}\cos x dx}_{I_1}$$

Burada I_1 integraline tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$I = -e^{-x}\sin x + (-e^{-x}\cos x - \underbrace{\int e^{-x}\sin x dx}_{I})$$

$$I = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - I$$
$$2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$
$$I = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$$

Şimdi has olmayan integralde sınırlar yerine koyulursa,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\sin x dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right)\Bigg|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-e^{-b}}{2}(\sin b + \cos b) + \frac{e^{-0}}{2}(\sin 0 + \cos 0)\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

elde edilir.

5. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

$x = 2\tan t$ değişken dönüşümü yapılırsa, $dx = 2\sec^2 t dt$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\int \frac{4\tan^2 t}{4\tan^2 t+4} 2\sec^2 t dt &= \int \frac{4\tan^2 t}{4(\tan^2 t+1)} 2\sec^2 t dt \\
&= 2\int \frac{4\tan^2 t}{4\sec^2 t} 2\sec^2 t dt \\
&= 2\int \tan^2 t dt \\
&= 2\int (\sec^2 t - 1)dt \\
&= 2\int \sec^2 t dt - 2\int dt \\
&= 2\tan t - 2t + C \\
&= 2\frac{x}{2} - 2Arc\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\
&= x - 2Arc\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Burada $\frac{x}{2} = \tan t$ ve $t = Arc\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ olduğu kullanılmıştır.

6. $n = 4$ için $\int_1^3 (x^3+1)dx$ integraline yaklaşık bir sonuç elde edebilmek için <u>Yamuk kuralını</u> kullanınız. **(10p.)**

<u>Yamuk Kuralı:</u> $\int_a^b f(x)dx \approx T_n$ yaklaşımıdır. Burada,

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$n = 4$ için $\Delta x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

$x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3$

$$T_4 \approx \frac{3-1}{8}\left[f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) \right]$$

$$T_4 \approx \frac{1}{4}\left[2 + 2\frac{35}{8} + 2\cdot 9 + 2\frac{133}{8} + 28 \right]$$

$$T_4 \approx \frac{1}{4}\left[2 + \frac{35}{4} + 18 + \frac{133}{4} + 28 \right]$$

$$T_4 \approx 22,5$$

7. $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \cdots$ <u>dizisinin</u> yakınsak olup olmadığını belirleyiniz. **(10p.)**

Verilen dizi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$3^{1/2}, 3^{1/4}, 3^{1/8}, \cdots, 3^{1/2^n}, \cdots$$

Dizinin genel terimi, $a_n = 3^{1/2^n}$ dir.

Önce dizinin monotonluğunu inceleyelim:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{1/2^{n+1}}}{3^{1/2^n}} = 3^{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}} = 3^{-\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2^{n+1}}}} < 1$$

olduğundan verilen dizi azalandır.

$\frac{1}{2^n} > 0$ olduğundan $3^{\frac{1}{2^n}} > 3^0 = 1$

olup verilen dizi alttan 1 ile sınırlıdır. Verilen dizi azalan ve sınırlı olduğu için yakınsaktır.

8. $f(x)=e^{-2x}$ fonksiyonunun $a=\frac{1}{2}$ merkezli Taylor serisini bulunuz. **(10p.)**

$$f(x)=e^{-2x},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e}$$
$$f'(x)=-2e^{-2x},\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{e}$$
$$f''(x)=4e^{-2x},\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{e}$$
$$f'''(x)=-8e^{-2x},\ f'''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{e}$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

olduğundan,

$$e^{-2x}=\frac{1}{e}-\frac{2}{e}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{2!e}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{8}{3!e}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{e}\left(1-\frac{2}{1!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^1+\frac{4}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{8}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k(-1)^k$$

bulunur.

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k^2+1)^2}$ serisinin yakınsak olup olmadığını, limit oran testi kullanarak belirleyiniz. **(10p.)**

Verilen serinin genel terimi:

$$a_n=\frac{n}{(n^2+1)^2}=\frac{n}{n^4+2n^2+1}$$

dir.

Genel terimi $b_n=\frac{1}{n^3}$ olan, yakınsak olduğunu bildiğimiz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ p-serisini kullanırsak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^4+2n^2+1}\cdot\frac{n^3}{1}=1>0$$

olduğundan limit-oran testi gereği, verilen seri de yakınsaktır.

10. $\sum_{k=1}^{\infty}k^3 2^{4k}(x-1)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. **(10p.)**

Oran testi yardımıyla bu serinin yakınsak olup olmadığını belirleyebiliriz.

$$a_n=n^3 2^{4n}(x-1)^n,\ a_{n+1}=(n+1)^3 2^{4(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3 2^{4n}2^4(x-1)^n(x-1)}{n^3 2^{4n}(x-1)^n}\right|$$
$$=16\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3(x-1)\right|<1$$
$$=16|x-1|<1$$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{1}{16}$$

olduğundan $R=\frac{1}{16}$ dır.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.
Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin