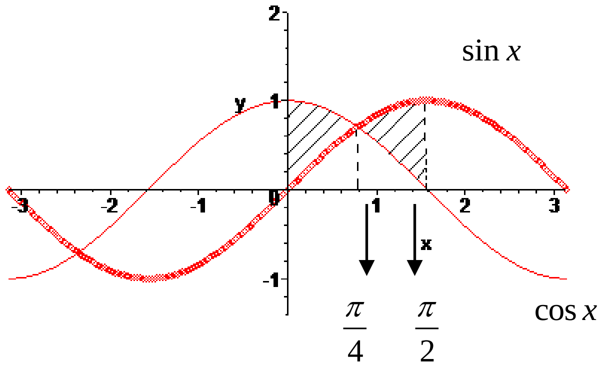
MAT 1002 ANALİZ II, Final Soruları

Öğrenci No : …………………… 01.06.2015

Adı, Soyadı : …………………… **CEVAP ANAHTARI**

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $y=\cos x$, $y=\sin x$, $x=0$ ve $x=\dfrac{\pi}{2}$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. **(10p.)**



$$\cos x=\sin x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\quad \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/4}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

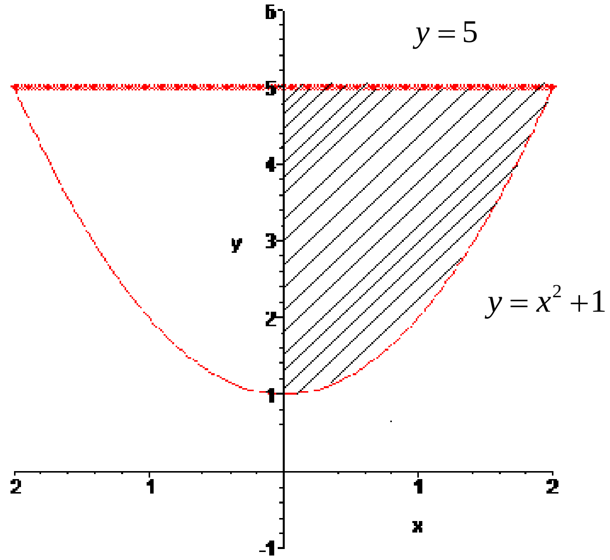
$$=\left[\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right]-\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)-1\right]-\left[1-\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)\right]$$

$$=\sqrt2-1-1+\sqrt2$$

$$=2\sqrt2-2\ br^2$$

2. $y=x^2+1$, $x=0$ ve $y=5$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin, y-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz. **(10p.)**



$$y=x^2+1 \Rightarrow x=0 \text{ için } y=1$$

$$y-1=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y-1}$$

$$V=\int_1^5 \pi(\sqrt{y-1})^2dy$$

$$=\pi\int_1^5 (y-1)dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-y\right)\Big|_1^5$$

$$=\pi\left[\left(\frac{25}{2}-5\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$=\pi(12-4)$$

$$=8\pi\ br^3$$

3. $\left[2,4\right]$ aralığında $y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2x}$ fonksiyonunun yay uzunluğunu bulunuz. **(10p.)**

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$$

$$\begin{aligned}
L&=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx\\
&=\int_2^4\sqrt{1+\frac{1}{4}x^4-2\frac{x^2}{2}\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx\\
&=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx\\
&=\int_2^4\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx\\
&=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx\\
&=\left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_2^4\\
&=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right)\Bigg|_2^4\\
&=\left[\left(\frac{64}{6}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{8}{6}-\frac{1}{4}\right)\right]\\
&=\frac{307}{24}
\end{aligned}$$

4. $\int x^5e^{2x^3}dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

Uygun bir değişken değiştirme yapılırsa,

$$t=2x^3\Rightarrow dt=6x^2dx$$

elde edilir. Böylece,

$$I=\int x^5e^{2x^3}dx=\int x^3x^2e^{2x^3}dx=\int\frac{t}{2}e^t\frac{dt}{6}=\frac{1}{12}\int te^tdt$$

bulunur. Bu son integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$I=\dfrac{1}{12}\int te^tdt$ integrali için

$u=t\Rightarrow du=dt$,
$dv=e^tdt\Rightarrow v=e^t$

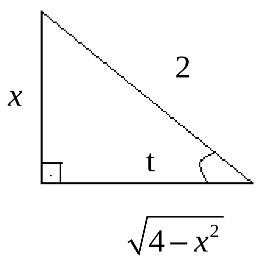
$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{12}\left(e^tt-\int e^tdt\right)\\
&=\frac{1}{12}\left(e^tt-e^t\right)+C\\
&=\frac{1}{12}\left(e^{2x^3}(2x^3)-e^{2x^3}\right)+C\\
&=\frac{1}{12}e^{2x^3}(2x^3-1)+C
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız. **(10p.)**

$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t dt$$
$$= 4\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt$$
$$= 4\int \sin^2 t dt$$
$$= 4\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$
$$= 2t - 2\sin 2t + C$$
$$= 2t - 4\sin t\cos t + C$$

$\dfrac{x}{2} = \sin t$ olduğundan $t = Arc\sin\dfrac{x}{2}$ dir.



$$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$I = 2Arc\sin\frac{x}{2} - 4\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$
$$= 2Arc\sin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2} + C$$

6. $n = 4$ için $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^3+x}dx$ integraline yaklaşık bir sonuç elde edebilmek için <u>Simpson kuralını</u> kullanınız. **(10p.)**

<u>Simpson Kuralı:</u> $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ yaklaşımıdır.

Burada n çift ve

$$S_n = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + f(x_n)\right]$$

dir.

$n = 4$ için $\Delta x = \dfrac{4-2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_0 = 2, x_1 = \dfrac{5}{2}, x_2 = 3, x_3 = \dfrac{7}{2}, x_4 = 4$

$$S_4 \approx \frac{4-2}{3.4}\left[f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + 2f(3) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4)\right]$$
$$\approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{10} + 4\sqrt{\frac{145}{8}} + 2\sqrt{30} + 4\sqrt{\frac{343}{8}} + \sqrt{68}\right]$$

7. Genel terimi $\left\{\dfrac{3^n}{1+3^n}\right\}$ olan <u>dizinin</u> yakınsak olup olmadığını belirleyiniz. **(10p.)**

Öncelikle dizinin monotonluğunu inceleyelim.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}}\frac{1+3^n}{3^n} = \frac{3+3^{n+1}}{1+3^{n+1}} > 1$$

olduğundan verilen dizi artandır. Yani monotondur.

$a_n = \dfrac{3^n}{1+3^n} < 1$ olup verilen dizi üstten 1 ile sınırlıdır. Verilen dizi monoton ve sınırlı olduğu için yakınsaktır.

8. $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun <u>Maclaurin Serisi</u>'ni bulunuz. **(10p.)**

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos x, & f(0)&=1\\ f'(x)&=-\sin x, & f'(0)&=0\\ f''(x)&=-\cos x, & f''(0)&=-1\\ f'''(x)&=\sin x, & f'''(0)&=0 \end{aligned}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

olduğundan,

$$f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

elde edilir.

9. $\frac{1}{100}+\frac{1}{100\sqrt{2}}+\frac{1}{100\sqrt{3}}+\cdots$ serisinin yakınsak olup olmadığını, <u>integral testi</u> kullanarak belirleyiniz. **(10p.)**

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100\sqrt{2}}+\frac{1}{100\sqrt{3}}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{100\sqrt{k}}$$

$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{x}}$ fonksiyonu $[1,\infty)$ aralığı üzerinde süreklidir, negatif değildir ve azalandır. $k\geq 1$ için $f(k)=a_k$ dır. Dolayısıyla integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{100\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{100}x^{-1/2}dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{100}x^{1/2}2\Big|_1^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{50}\left[\sqrt{b}-1\right]$$
$$=\infty$$

olduğundan integral testi gereği verilen seri ıraksaktır.

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{(2k)!}x^{2k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. **(10p.)**

Oran testi yardımıyla, serinin yakınsak olup olmadığını belirleyebilriz.

$$a_n=\frac{5^n}{(2n)!}x^n,\ a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(2(n+1))!}x^{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n5x^{2n}x^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{5^nx^{2n}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right|=0<1$$

olduğundan verilen seri her x değeri için yakınsaktır. Yani $R=\infty$ dur.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Elif Çetin