

MAT3020 SOYUT CEBİR FİNAL SINAVI SORULARI

Ad-Soyad :.....CEVAP ANAHTARI.....

25.05.2015

No:.....

Soru 1) Z tamsayılar kümesi, üzerinde $a*b = a+2b$ ile tanımlı olan ikili işlemle birlikte bir grup olur mu?

$(a*b)*c = (a+2b)*c = a+2b+2c$ ve $a*(b*c) = a*(b+2c) = a+2(b+2c) = a+2b+4c$ olduğundan birleşme özelliği sağlanmaz ve $Z, *$ işlemine göre bir grup değildir.

Soru 2) Bir G grubunda bir $a \in G$ elemanı için $Z(a) = \{g \in G : ga = ag\}$ kümesi a elemanının merkezleştiricisi olarak adlandırılır.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ elemanının merkezleştiricisini belirleyiniz.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinin her iki

tarafında çarpma yapılırsa $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$

elde edilir. Buradan $c=0$, $a=b+d$ elde edilir. Yani merkezleştirici b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

$\begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ şeklindeki tüm matrislerden oluşur.

Soru 3) $Z_{17}^* = Z_{17} \setminus \{0\}$ grubunda $H = \{x | x \equiv 1 \pmod{4}\}$ altkümesinin bir alt grup olup olmadığını belirleyiniz.

$Z_{17}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15, 16\}$ ve $H = \{1, 5, 9, 13\} \subset Z_{17}^*$ olup sonlu bir altküme olduğundan kapalılığına bakmak gerekir. $5 \cdot 9 = 11 \notin H$ olup H kapalı olmadığından bir alt grup değildir.

Soru 4) 8 elemanlı D_4 dihedral grubunun biri devirli biri devirli olmayan 4 elemanlı iki alt grubunu ve bu altgrupların elemanlarını bulunuz.

$D_4 \cong \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ olsun. Grup tablolarından biliyoruz ki 4 elemanlı 2 farklı grup vardır. C_4 ve V_4 . C_4 devirli grubu a veya a^3 ile üretilebilir ve $C_4 \cong \{e, a, a^2, a^3\}$ şeklindedir. V_4 Klein dörtlü grubu ise bir tek elemanla üretilemez ve devirli değildir. e dışında tüm elemanlar 2. mertebededir. O halde $V_4 \cong \{e, a^2, b, a^2b\}$ şeklindedir.

Soru 5) $f : G \rightarrow G'$ bir monomorfizm ise $G/\text{Ker } f$ bölüm grubunu belirleyiniz.

f bir monomorfizm olduğundan birebirdir. O halde çekirdek tek elemanlıdır ve $\text{Ker } f = \{e\}$ olur. Yani $G/\text{Ker } f = G/\{e\} = G$ olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC