

MAT3020 SOYUT CEBİR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI.....

30.03.2015

No:.....

AŞAĞIDA VERİLEN CEVAPLAR TEK CEVAP DEĞİLDİR. FARKLI ÇÖZÜM YOLLARI İZLENEBİLİR.

Soru 1) $a = (1\ 3)(2\ 4\ 6)$ permütasyonu en küçük hangi simetrik grubun elemanıdır? a 'nın mertebesini hesaplayınız. a^{55} elemanını en sade şekilde yazınız.

5 tane nesne bulunduğundan en az S_5 grubunun elemanıdır. Bir r -devirin mertebesi r olduğundan $(1\ 3)$ 'ün mertebesi 2; $(2\ 4\ 6)$ 'nın mertebesi de 3'tür. Dolayısıyla bu iki elemanın çarpımının mertebesi $2 \cdot 3 = 6$ 'dır. (Bunu a 'nın kuvvetlerini hesaplayarak da gösterebilirsiniz). Dolayısıyla $a^{55} = (a^6)^9 a = ea = a$ elde edilir.

Soru 2) G bir grup olsun. $g \in G$ ise $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\} < G$?

$H = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $x, y \in G$ olsun. O halde $r, s \in \mathbb{Z}$ için $x = g^r, y = g^s$ alınabilir. Bu durumda $xy^{-1} = g^r(g^s)^{-1} = g^{r-s}$ olur ve $r-s \in \mathbb{Z}$ olacağından $xy^{-1} \in H$ bulunur. Bu da $H < G$ olduğunu gösterir.

Soru 3) A_n altgrubunun S_n grubunda kaç tane koseti vardır? Bu kosetlerden kaç tane altgruptur?

A_n 'de $n!/2$ tane, S_n 'de ise $n!$ tane eleman bulunmaktadır. O halde $n!/(n!/2) = 2$ tane koset vardır. Kosetlerden sadece birisinde e bulunacağından sadece A_n bir altgruptur.

Soru 4) G bir grup ve $H < G$ olsun. $H < G \Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ için } g^{-1}H = Hg^{-1}$ olup olmadığını tartışınız.

$H < G \Leftrightarrow \text{Her } g \in G \text{ için } gH = Hg$ olduğunu biliyoruz. Bu her $g \in G$ için doğru olduğundan ve her bir grup elemanı da aynı zamanda bir başka elemanın tersi olduğundan g yerine g^{-1} alırsak sonuç aşikârdır.

Soru 5) $H = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\theta}\}$ kümesi $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ çarpım grubunun bir altgrubu mudur?

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. $z_1 = e^{i\theta}$ ve $z_2 = e^{i\varphi}$ yazabiliriz. O halde $z_1 z_2^{-1} = e^{i\theta} e^{-i\varphi} = e^{i(\theta-\varphi)} = e^{i(\theta-\varphi)}$ olur. Yani $z_1 z_2^{-1} \in H$ olur. Bu da $H < \mathbb{C}^*$ demektir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC