

Öğrenci No :

01.04.2014

Adı-Soyadı :

Aşağıdaki soruların cevaplarını boşluklara yazınız.

1. $[-1, 6]$ aralığı üzerinde

$y = x^2 - 2x - 3$, $y = 2x + 2$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün eksenleri

kestirgi noktalar :

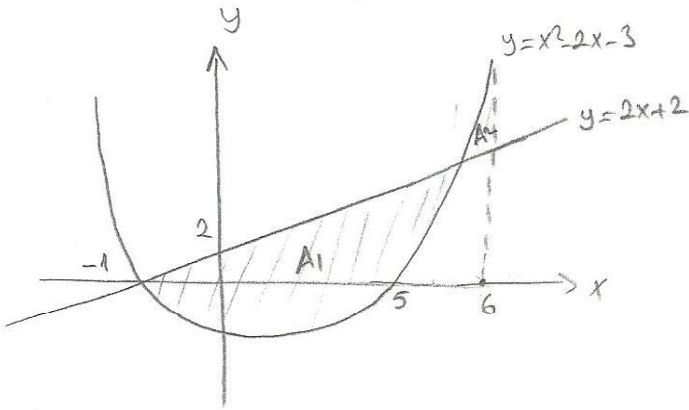
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$y = x^2 - 2x - 3$ ve $y = 2x + 2$ fonksiyonlarının

kesiştikleri noktalar :

$$x^2 - 2x - 3 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \vee x = 5$$



$$A_1 = \int_{-1}^5 [(2x+2) - (x^2-2x-3)] dx$$

$$= \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^5$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 50 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5 \right) = 36$$

$$A_2 = \int_5^6 [(x^2 - 2x - 3) - (2x + 2)] dx$$

$$= \int_5^6 (x^2 - 4x - 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right) \Big|_5^6 = \frac{10}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = 36 + \frac{10}{3} = \frac{118}{3}$$

2. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+9} dx \quad \begin{matrix} x+2 = 3 \tan t \\ dx = 3 \sec^2 t dt \end{matrix}$$

$$= \int \frac{2 \cdot (3 \tan t)}{(3 \tan t)^2 + 9} \cdot 3 \sec^2 t dt$$

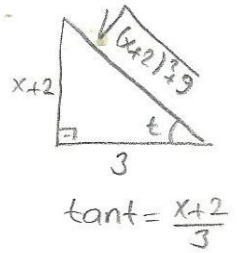
$$= \int \frac{6 \tan t}{9(\tan^2 t + 1)} \cdot 3 \sec^2 t dt = 2 \int \tan t dt$$

$$= 2 \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \quad \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{matrix}$$

$$= -2 \int \frac{du}{u} = -2 \ln |u| + C$$

$$= -2 \ln |\cos t| + C$$

$$= -2 \ln \left| \frac{3}{\sqrt{(x+2)^2+9}} \right| + C$$



3. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$$

$$\int (2 - \sqrt{u})^2 du = \int (4 - 4\sqrt{u} + u) du$$

$$= 4 \int du - 4 \int \sqrt{u} du + \int u du$$

$$= 4u - \frac{8}{3} u^{3/2} + \frac{u^2}{2} + C$$

$$= 4 \tan x - \frac{8}{3} (\tan x)^{3/2} + \frac{1}{2} (\tan x)^2 + C$$

4. $\int x^2 \text{Arcsin } x dx$ integralini hesaplayınız.

Kısmi integrasyon uygulanırsa:

$$u = \text{Arcsin } x \quad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \text{Arcsin } x dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \text{Arcsin } x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \text{Arcsin } x - \frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_1} \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}$$

$$= \int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = \int \sin^3 t dt$$

$$= \int \sin t \cdot \sin^2 t dt$$

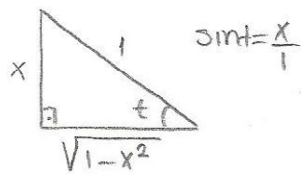
$$= \int \sin t (1 - \cos^2 t) dt \quad \begin{array}{l} w = \cos t \\ dw = -\sin t dt \end{array}$$

$$= - \int (1 - w^2) dw = \int (w^2 - 1) dw$$

$$= \frac{w^3}{3} - w$$

$$= \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t$$

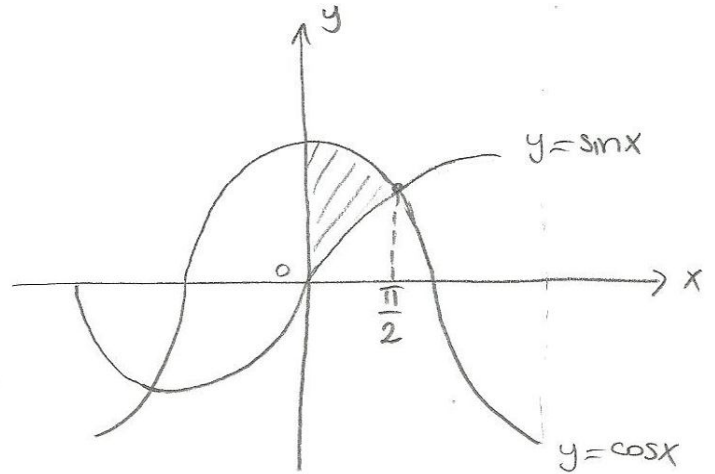
$$= \frac{1}{3} (\sqrt{1-x^2})^3 - \sqrt{1-x^2}$$



$$\Rightarrow \int x^2 \cdot \text{Arcsin } x dx = \frac{x^3}{3} \text{Arcsin } x - \frac{1}{3} I_1$$

$$= \frac{x^3}{3} \text{Arcsin } x - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} (\sqrt{1-x^2})^3 - \sqrt{1-x^2} \right] + C$$

5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ denklemlerinin grafikleri tarafından 1. bölgede sınırlanan bölgenin, x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini, dilimleme yöntemiyle bulunuz.



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 dx - \pi \int_0^{\pi/4} (\sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 x) dx - \pi \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} dx - \pi \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx - \pi \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} dx - 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} dx - 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} dx - \pi \int_0^{\pi/4} dx + \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\sin 0}_0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

6. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2 dx$ belirli integralini

hesaplayınız.

$I = \int (\sec x + \tan x)^2 dx$ olsun.

$$I = \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x) dx$$

$$= \underbrace{\int \sec^2 x dx}_{I_1} + 2 \underbrace{\int \sec x \tan x dx}_{I_2} + \underbrace{\int \tan^2 x dx}_{I_3}$$

$$I_1 = \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$I_2 = \int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$I_3 = \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x$$

$$I = I_1 + 2 I_2 + I_3$$

$$= \tan x + 2 \sec x + \tan x - x$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2 dx = (2 \tan x + 2 \sec x - x) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= 4 - \frac{\pi}{2}$$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ integralini hesaplayınız.

$$e^x - 1 = u^2 \Rightarrow e^x dx = 2u du$$

$$e^x = 1 + u^2 \quad dx = \frac{2u du}{1 + u^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{2u du}{1 + u^2}$$

$$= 2 \int \frac{du}{1 + u^2}$$

$$= 2 \cdot \text{Arctan} u + C$$

$$= 2 \cdot \text{Arctan} \sqrt{e^x - 1} + C$$

8. $\int_0^2 x \ln(x+1) dx$ integralini hesaplayınız.

Kısmi integrasyon yapılırsa:

$$u = \ln(x+1) \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{dx}{x+1} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int x \cdot \ln(x+1) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

$$\int_0^2 x \cdot \ln(x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right] \Big|_0^2$$

$$= \left[\left(2 \cdot \ln 3 - 1 + 1 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) - \left(-\frac{1}{2} \ln 1 \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln 3$$

9. $[1,2]$ aralığında $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$ fonksiyonunun yay uzunluğunu bulunuz.

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$$

$$y' = x^4 - \frac{1}{4x^4}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(x^4 - \frac{1}{4x^4}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + x^8 - 2x^4 \cdot \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{16x^8}} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{x^8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^8}} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(x^4 + \frac{1}{4x^4}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^4 + \frac{1}{4x^4}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{1}{12x^3}\right) \Big|_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{96}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{3011}{480}$$

10. $f(x) = 3x - 6$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanı, $[2,4]$ aralığını n eşit parçaya bölerek ve x_k^* noktalarını her bir alt aralığın sağ uç noktası olarak alarak, dikdörtgenler yardımı ile hesaplayınız.

$[2,4]$ aralığını n eşit parçaya

bölsek, aralık boyu : $\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

$$x_1 = 2 + \frac{2}{n}, x_2 = 2 + \frac{4}{n}, \dots, x_k = 2 + \frac{2k}{n}, \dots$$

$$x_n = 2 + \frac{2n}{n} = 4$$

olduğundan verilen dikdörtgenlerin alanları toplamı,

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

$$f(x_k) = 3x_k - 6$$

$$= 3\left(2 + \frac{2k}{n}\right) - 6 = \frac{6k}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{6k}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 6$$

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar.

Prof. Dr. İ. Naci Cangül, Arş. Gör. Aysun Yurttaş,

Arş. Gör. Elif Çetin