MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI…….. **12.11.2013**

No :...

Soru 1) a+3b toplamı 7 ile bölünüyorsa 2a-b farkının da 7 ile bölünebildiğini gösteriniz.

7, a+3b'yi bölersek k bir tamsayı olmak üzere a+3b = 7k yazılabilir. Bu durumda a+3b-7b =7k-7b olup 7 ile bölünür, yani a-4b = 7(k-b) de 7 ile bölünür. Bu durumda a-4b + 7a = 7(k-b) +7a = 7(k-b+a) olup 7 ile bölünür, yani 8a-4b farkı da 7 ile bölünür. Bir başka deyişle 4(2a-b) 7 ile bölünür. 7 ile 4 aralarında asal olduğundan 7, 2a-b farkını böler

Soru 2) p ile q iki farklı asal sayı olmak üzere $\varphi(p\cdot q^3) = 108$ ise p ve q sayılarını hesaplayınız.

$\varphi(p\cdot q^3) = 108$ ifadesi p ve q^3 aralarında asal olduğundan $\varphi(p)\cdot\varphi(q^3) = 108$ yazabiliriz. Bu da $(p-1)(q^3-q^2) = 108$ demektir. 108'in tüm çarpanları kontrol edildiğinde p = 7 ve q = 3 bulunur.

Soru 3) p ve q farklı asallar olmak üzere n = pq şeklinde yazılabilen tüm mükemmel sayıları belirleyiniz.

n = pq mükemmel sayı ise t(n) = 2n olmalıdır. Yani t(pq) = 2pq ve denk olarak

$$1 + p + q + pq = 2pq$$

olmalıdır. O halde

$$pq = p + q + 1$$

veya

$$p = \frac{q+1}{q-1}$$

elde edilir. q = 2 ise p = 3, q = 3 ise p = 2 elde edilir ki iki halde de n = 6 mükemmel sayıdır. $q > 3$ ise q–1, q+1 sayısını bölmeyeceğinden n = pq mükemmel olamaz.

Soru 4) İki tamsayının kareleri farkının 4 modunda 2 olamayacağını gösteriniz.

Bir tamsayının karesi 4 modunda 0 veya 1 olabilir. Dolayısıyla iki tam karenin farkı 0-0, 0-1, 1-1 veya 1-0 olabilir. Bunlar da 4 modunda 0, 1 veya 3'e denktir. Yani 2 olamaz.

Soru 5) $(a,b) = 1$ ise $(a+b,a^2+b^2-3ab)$ sayısının 1 veya 5 olduğunu gösteriniz.

$(a,b) = 1$ olsun. $a^2+b^2-3ab = a^2+b^2+2ab-5ab = (a+b)^2-5ab$ olur. $d = (a+b,a^2+b^2-3ab)$ dersek $d = (a+b,(a+b)^2-5ab)$ olur. Buradan d, a+b'yi ve $(a+b)^2-5ab$'yi bölecektir. Bir k tamsayısı için a+b = dk yazılabilir. d, aynı zamanda $(a+b)^2-5ab$'yi böleceğinden bir t tamsayısı için $(a+b)^2-5ab = dt$ yazılabilir. Buradan $(dk)^2-5ab = dt$ olur. Yani $(dk)^2-dt = 5ab$ olur. Sol taraf d ile bölünebildiğinden 5ab çarpımı da her a, b ikilisi için d ile bölünür. Bunu garantileyen tek durum d'nin 5'i bölmesidir. Bu da d'nin 1 veya 5 olmasıyla mümkündür.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc***