MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **09.01.2012**

No :..

Soru 1) $\dfrac{\varphi(n)}{n}=\dfrac{4}{13}$ ise n sayısının alabileceği en küçük 3 değeri hesaplayınız.

$\dfrac{\varphi(n)}{n}=\prod_{p|n}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)=\dfrac{4}{13}$ olduğundan ilk olarak hangi p asallarının n sayısının bölenleri olduğunu belirlemeliyiz. Sırasıyla p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … için $1-\dfrac{1}{p}$ = 1/2, 2/3, 4/5, 6/7, 10/11, 12/13, 16/17, … olur. Bunlardan çarpımı 4/13 olanlar ise 2, 3 ve 13 olur. Yani n sayısı $n = 2^a3^b13^c$ şeklinde olmalıdır. Bu özellikteki en küçük sayılar $2\cdot3\cdot13$ = 78, $2^2\cdot3\cdot13$ = 156, $2^3\cdot3\cdot13$ = 312, $2\cdot3^2\cdot13$ = 234 şeklinde olduğundan en küçük üçü 78, 156 ve 234 olur.

Soru 2) i) $x^{17}+16x^{14}+12x^5+11$ polinomunun 5 modundaki tüm çözümlerini hesaplayınız.

Fermat'nın küçük teoremi gereği (x,5) = 1 iken, yani $x\equiv1, 2, 3, 4\ (5)$ iken $x^4\equiv1\ (5)$ veya denk olarak $x^5\equiv x\ (5)$ yazabiliriz. Bu durumda $x^{17}\equiv(x^5)^3x^2\equiv x^3x^2\equiv x^5\equiv x\ (5)$, $x^{14}\equiv(x^5)^2x^4\equiv x^2x^4\equiv x^6\equiv x^2$ olup $x^{17}+16x^{14}+12x^5+11 \equiv x+x^2+2x+1 \equiv x^2+3x+1 \equiv x^2-2x+1 \equiv (x-1)^2$ olup tek kök $x\equiv1\ (5)$'tir. $x\equiv0\ (5)$ durumunda çözüm olmadığı da açıktır.

Soru 3) a ve b tamsayılar olmak üzere a+b toplamı 5 ile bölünebiliyorsa a+11b sayısının da 5 ile bölünebildiğini gösteriniz.

a+b toplamı 5 ile bölünebiliyorsa k bir tamsayı olmak üzere a+b = 5k yazabiliriz. Bu durumda a+11b = a+b+10b = 5k+10b = 5(k+2b) olur ve parantez içi bir tamsayı olduğundan a+11b sayısı da 5 ile bölünür.

Soru 4) 5'in ikinci dereceden bir kalan olduğu tüm asalları belirleyiniz.

$\left(\dfrac{5}{p}\right)=\left(\dfrac{p}{5}\right)(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}=1$ olması için $\left(\dfrac{p}{5}\right)=1$ olması gerekir. 5 modundaki ikinci dereceden kalanların 1 ve 4 olduğunu hatırlarsak istenen asalların $p\equiv1$ veya 4 (5) ya da denk olarak $p\equiv1$ veya 9 (10) olacağını buluruz.

Soru 5) a, 29 modunda bir birim ise

$$\left(\frac{-a}{29}\right)=\left(\frac{a}{29}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

$$\left(\frac{-a}{29}\right)=\left(\frac{-1}{29}\right)\left(\frac{a}{29}\right)=\left(\frac{144}{29}\right)\left(\frac{a}{29}\right)=\left(\frac{12}{29}\right)^2\left(\frac{a}{29}\right)=\left(\frac{a}{29}\right)$$

olur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc***