MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI …….... **17.01.2011**

No :..

Soru 1) İki ardışık doğal sayının aralarında asal olduğunu gösteriniz.

n ve n+1 sayılarının obebine d diyelim. d|n ve d|(n+1)'dir. O halde d|[(n+1)-n] yazılabilir. Bu da d|1 demektir.

Soru 2) -3 sayısının bir ikinci dereceden kalan olduğu tüm asalları belirleyiniz.

$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$ olup sağdaki iki parantezin aynı anda 1 veya -1 olması gerekir. İlk durumda $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ olur. Bu da p ≡ 1 (4) anlamına gelir. Aynı anda $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ olmalıdır. Yani p ≡ 1 (3) olması gerekir ve buradan p ≡ 1 (12) olması gerektiği bulunur. İki parantezin de –1 olması durumunda p ≡ 3 (4) ve p ≡ 1 (3) olmalıdır. Bu iki kongrüansın ortak çözümü ise p ≡ 7 (12)'dir. Sonuç olarak –3'ün bir ikinci dereceden kalan olması için gerek ve yeter şartın p ≡ 1 (12) veya p ≡ 7 (12) olması olduğu ve kısaca p ≡ 1 (6) olduğu bulunur.

Soru 3) 121'in 32 tane köke sahip olduğu en küçük iki n modunu belirleyiniz.

N formülündeki üç durumu sırasıyla inceleyelim. n ≡ 0 (8) ise k+1 = 5 ve k = 4 olur. Bu özellikteki en küçük n değeri $n = 2^3.3.5.7$'dir. n ≡ 2 (4) ise k-1 = 5 ve k = 6 olur. Bu özellikteki en küçük n değeri n = 2.3.5.7.11.13'dür. Diğer hallerde ise k = 5 olur. Bu özellikteki en küçük n değeri $n = 2^2.3.5.7.11$'dir. Bu üç değerin ilki ve üçüncüsü en küçük iki değerdir.

Soru 4) μ Möbious fonksiyonu, p, q farklı iki tek asal ve m, n, r pozitif doğal sayılar olmak üzere $\mu(2^m p^n q^r)$ sayısının alabileceği değerleri m, n ve r'ye göre belirleyiniz.

m.n.r > 1 ise sonuç 0'dır.
m.n.r = 1 ise sonuç $(-1)^3 = -1$ olur.
m.n = 1 ve r = 0 ise sonuç $(-1)^2 = 1$'dir.
m.r = 1 ve n = 0 ise sonuç $(-1)^2 = 1$'dir.
r.n = 1 ve m = 0 ise sonuç $(-1)^2 = 1$'dir.
m, n ve r'nin sadece biri 1, diğerleri 0 ise sonuç -1'dir.

Soru 5) $2^{55}+5^{55}$ toplamının 11 ile bölünebildiğini gösteriniz.

Fermat'nın küçük teoremine göre $2^{10} \equiv 1$ (11) yazabiliriz. O halde $2^{50} \equiv 1$ (11) olur. Dolayısıyla $2^{51} \equiv 2$, $2^{52} \equiv 4$, $2^{53} \equiv 8$, $2^{54} \equiv 5$, $2^{55} \equiv 10$ olur. Benzer şekilde $5^{10} \equiv 1$ (11) yazabiliriz. O halde $5^{50} \equiv 1$ (11) olur. Dolayısıyla $5^{51} \equiv 5$, $5^{52} \equiv 3$, $5^{53} \equiv 4$, $5^{54} \equiv 9$, $5^{55} \equiv 1$ olur. O halde $2^{55} + 5^{55} \equiv 10 + 1 \equiv 0$ (11) bulunur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc***