MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI…........ **09.11.2010**

No :..

Soru 1) $3|\varphi(n)$ olacak şekilde sonsuz çoklukta n doğal sayısının var olduğunu gösteriniz.

Bu özellikte bir çok sayı dizisi seçilebilir. Örnek olarak $n = 3^k$ şeklinde seçilirse $\varphi(n) = 3^k-3^{k-1} = 3^k(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}3^k$ olur ve her $k > 1$ için bu sayının 3 ile bölünebildiği açıktır.

Soru 2) Her n tamsayısı için $n^{13}-n$ farkının 2.3.5.7.13 ile bölünebildiğini gösteriniz.

$n^{13}-n$ sayısının 2.3.5.7.13 ile bölünebildiğini göstermek, aynı sayının 2, 3, 5, 7 ve 13 ile bölünebildiğini göstermekle aynıdır. p asal ve p ile n aralarında asal olmak üzere $n^p \equiv n\ (p)$ olduğunu Fermat'nın küçük teoreminden biliyoruz. p = 2 için $n^2 \equiv n\ (2)$ olup

$$n^{13} = (n^2)^6.n \equiv n^6.n \equiv (n^2)^3.n \equiv n^3.n = (n^2)^2 \equiv n^2$$
$$\equiv n\ (2)$$

olur. Benzer şekilde p = 3 için $n^3 \equiv n\ (3)$ olup

$$n^{13} = (n^3)^4.n \equiv n^4.n \equiv n^5 \equiv n^3.n^2 = n.n^2 \equiv n^3$$
$$\equiv n\ (3)$$

olur. p = 5, 7 ve 13 için de aynı sonuç elde edilir.

Soru 3) $ax+2ay = b$ lineer Diophant denkleminin çözümü olması için gerekli şartları belirleyiniz.

$(a,2a) = a \mid b$ olmalıdır.

Soru 4) a ve b tek tamsayılar iken a^2+b^2 toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

$a = 2k+1$ ve $b = 2t+1$ (k, t tamsayı) olmak üzere

$$a^2 + b^2 = 4(k^2+t^2+k+t) + 2$$

yazılabilir. 4 modunda tek sayıların karesi 1'e, çift sayıların karesi 0'a denk olduğundan iki tamkarenin toplamı 4 modunda 2 olup bir tamkare olamaz.

Soru 5) 6 modunda 1'e denk olan sonsuz çoklukta asla sayı bulunduğunu gösteriniz.

Tersine 6 modunda 1'e denk olan sonlu tane asal sayı olsun ve bunlar 7, 13, 19, 31, …, p olsun.

$$A = 7.13.19. \ldots .p + 6$$

tanımlayalım. 6 modunda 1'e denk olan sayıların çarpımı da 6 modunda 1'e denk olacağından A sayısı 6 modunda 1'e denktir. Ayrıca A, 6 modunda 1'e denk olan tüm asal sayılardan daha da büyüktür. Dolayısıyla en az bir tane (ya da tek sayıda) 6 modunda 1'e denk olan asal çarpanı vardır. Ancak A, 6 modunda 1'e denk olan asalların hiçbirine bölünmediğinden yeni bir asaldır. Bu da 6 modunda 1'e denk olan asalların sayısının sonlu olduğu varsayımımızla çelişir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc***