MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **15.12.2009**

No :..

Soru 1) Hangi p asalları için p^2+8 sayısının da asal olduğunu belirleyiniz. (20 puan)

p = 3 için $3^2+8 = 17$ asaldır. 3'den büyük asal sayılar örneğin 3 modunda düşünüldüğünde k bir doğal sayı olmak üzere ya 3k+1 ya da 3k+2 şeklinde ifade edilebilir. İlk durumda
$p^2+8 = (3k+1)^2+8 = 9k^2+6k+9 = 3(3k^2+2k+3)$ olup; ikinci durumda da
$p^2+8 = (3k+2)^2+8 = 9k^2+12k+12 = 3(3k^2+4k+4)$ olup 3 ile bölünebildiğinden asal olamaz. Yani sadece p = 3 için p^2+8 sayısı da asaldır.

Soru 2) Hangi n doğal sayıları için (n+4)!+3 sayısının 7 ile bölünebildiğini belirleyiniz. (20 puan)

n=1 için 123, 7 ile bölünmez.
n=2 için 723, 7 ile bölünmez.
$n\geq 3$ için (n+4)!, 7 ile bölünebildiğinden 3 fazlası 7 ile bölünemez. Yani hiçbir n doğal sayısı için bu toplam 7 ile bölünemez.

Soru 3) p bir tek asal sayı olmak üzere

$$\varphi(p^3)+ \varphi(p^4)+ \dots +\varphi(p^{10}) = p^{10}-p^2$$

olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Euler φ fonksiyonunun bir özelliğinin

$$1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\varphi(p^3)+ \dots +\varphi(p^n) = p^n$$

olduğunu biliyoruz. n = 10 alınırsa

$$1+p-1+p^2-p+\varphi(p^3)+ \dots +\varphi(p^{10}) = p^{10}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

Soru 4) $5x + 4y \equiv 7 \ (10)$ kongrüansının çözüm kümesini bulunuz. (20 puan)

$4x \equiv 7-5x \ (10)$ olup, x değişkeninin 0'dan 9'a kadar olan değerlerinin tümü için 7–5x, 4 ile bölünmediğinden biz deneme yoluyla uygun x değerlerini seçmeliyiz.
x = 1 için $4y \equiv 2 \ (10)$ ve $4y \equiv 12 \ (10)$ ve (4,10) = 2 olduğundan $y \equiv 3 \ (5)$ elde edilir. Yani x = 1 için y = 3 ve y = 8 elde edilir. x değişkeninin 10/(10,4) = 5 farklı değeri olduğundan diğer x değerleri periyodik olarak 3, 5, 7 ve 9 olarak bulunur. Karşılık gelen y değerleri yine 3 ve 8 dir. Yani
Ç = {(1,3), (3,3), (5,3), (7,3), (9,3), (1,8), (3,8), (5,8), (7,8), (9,8)} şeklindedir.

Soru 5) $x^{42}-2x^{21}+x-3 \equiv 0 \ (21)$ kongrüans sisteminin ortak çözümünü bulunuz. (20 puan)

21 birleşik sayı olduğundan verilen kongrüansı 3 ve 7 modlarına indirgeyerek ayrı ayrı çözmek ve sonra ortak çözümü elde etmek gerekir. 3 modunda $x^3 \equiv x \ (3)$ olduğundan verilen kongrüans $x^2-x \equiv 0 \ (3)$ haline gelir ve bunun çözümleri de $x \equiv 0 \ (3)$ ve $x \equiv 1 \ (3)$ olarak bulunur. 7 modunda $x^7 \equiv x \ (7)$ olduğundan verilen kongrüans $x^6-2x^3+x-3 \equiv 0 \ (7)$ haline gelir ve deneme yoluyla bunun tek çözümünün $x \equiv 4 \ (7)$ olduğu bulunur. O halde $x \equiv 0 \ (3)$ ve $x \equiv 4 \ (7)$ kongrüansları ortak çözülerek $x \equiv 18 \ (21)$; $x \equiv 1 \ (3)$ ve $x \equiv 4 \ (7)$ kongrüansları ortak çözülerek de $x \equiv 4 \ (21)$ çözümleri elde edilir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc***