MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:……CEVAP ANAHTARI....... 22.07.2009

No :...

Soru 1) Değişmeli bir grupta tersine eşit olan elemanların kümesinin bir altgrup oluşturup oluşturmadığını belirleyiniz.

G grubundaki tersine eşit olan, yani ikinci mertebeden elemanların kümesini H ile gösterelim. a ve b, H'ın iki elemanı olsun. $ab^{-1} \in H$ olduğunu göstermeliyiz. $a^2 = b^2 = e$ olduğunu biliyoruz. O halde $a = a^{-1}$ ve $b = b^{-1}$ yazabiliriz. G'nin değişmeliliğini kullanarak

$$(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = abab = a^2b^2 = e.e = e$$

elde ederiz ki bu da, ab^{-1} etkisiz eleman olamayacağından, ab^{-1} elemanının mertebesinin 2 olduğunu gösterir. Yani $ab^{-1} \in H$ olur ve H<G elde edilir.

Soru 2) A_5, S_5'in normal altgrubu mudur? Kosetlerini bulunuz. A_5'de olmayıp S_5'de olan 2 permütasyon yazınız. Neden?

A_5, S_5'in iki indeksli bir altgrubudur. Çünkü $|A_5| = 5!/2$, $|S_5| = 5!$'dir. İndeksi iki olan altgruplar normal altgrup olacağından A_5, S_5'in iki indeksli bir normal altgrubudur. a = (1 2)(1 4)(1 3) ve b = (1 5) birer tek permütasyon olup A_5'de olmayıp S_5'dedirler. Çünkü her ikisindeki transpozisyonların sayıları tektir.

Soru 3) $\varphi : Z \to 3Z$, $n \to 6n$ dönüşümünün türünü belirleyiniz. Çekirdeğini bulunuz. Çekirdek kaç elemanlıdır?

φ dönüşümü 1:1'dir fakat örten değildir (örneğin 9'a giden hiç eleman yoktur). İşlem korur. Yani bir monomorfizmdir.

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{n \in \mathbf{Z} : \varphi(n) = 6n = 0\} = \{0\}$$

olduğu açıktır. Tabii ki çekirdek tek elemanlıdır.

Soru 4) G bir grup ve a, b iki eleman olsun. Bu durumda herhangi bir pozitif n tamsayısı için $(ab^2a^{-1})^n = ab^{2n}a^{-1}$ olup olmadığını inceleyiniz.

$$\begin{aligned}(ab^2a^{-1})^n &= ab^2a\text{-}1ab^2a^{-1}ab^2a^{-1} \ldots ab^2a^{-1} \\ &= ab^2b^2b^2 \ldots b^2a^{-1} \\ &= ab^{2n}a^{-1}\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Soru 5) $Z^*_{17} = Z_{17} - \{0\}$ grubunda

$$H = \{x \mid x \equiv 1 \ (4)\}$$

altkümesi bir altgrup mudur?

x, y ∈ H keyfi iki eleman olsun. H sonlu olduğundan H'ın bir altgrup olduğunu gösterebilmek için kapalı olduğunu yani x.y ∈ H olduğunu göstermek gerekir.

x, y ∈ H ise $x \equiv 1$ (4) ve $y \equiv 1$ (4) demektir. Yani a ve b tamsayılar olmak üzere $x = 1 + 4a$ ve $y = 1 + 4b$ yazılabilir. O halde

$$x.y = (1 + 4a)(1 + 4b) = 1 + 4(a+b+4ab)$$

yazılabilir. Burada a+b+4ab bir tamsayı olduğundan $x.y \equiv 1$ (4) ve x.y ∈ H olur. Yani H bir altgruptur.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**