

MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ FINAL SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI.....

01.06.2009

No:.....

Soru 1) $D_4 \cong \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ grubunun kamutatör altgrubunu hesaplayınız.

Kamutatör altgrubu; x ve y , D_4 grubunun elemanları olmak üzere $xyx^{-1}y^{-1}$ şeklindeki elemanlardan oluşur. x ve y , 8 elemandan ikisi olarak seçilir ve gerekli işlemler yapılırsa kamutatör altgrubunun $\{e, a^2\}$ olduğu görülür. Örneğin $x = a$, $y = ab$ alınır ve $ab = ba^3$ olduğu kullanılırsa

$$xyx^{-1}y^{-1} = a.ab.a^{-1}.(ab)^{-1} = a^2ba^3ba^3 = a^2abba^3 = a^6 = a^2;$$

$x = a$, $y = a^2b$ alınır

$$xyx^{-1}y^{-1} = a.a^2b.a^{-1}.(a^2b)^{-1} = a^3ba^3ba^2 = a^3abba^2 = a^6 = a^2;$$

$x = a^2$, $y = a^2b$ alınır

$$xyx^{-1}y^{-1} = a^2.a^2b.a^{-2}.(a^2b)^{-1} = ba^2ba^2 = baaba^2 = baba^3a^2 = baba = bba^3a = e$$

elde edilmektedir.

Soru 2) D_4 grubunun biri devirli diğeri devirli olmayan 4. mertebeden iki altgrubunu bulunuz.

Devirli altgrup $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\} \cong C_4$ olur. Devirli olmayan altgrupta ise 4. mertebeden eleman olmaması gerektiğinden a veya a^3 olmamalıdır. a^2 ve b elemanları 2. mertebeden olduğundan $\langle a^2, b \rangle = \{a^2, b, e, a^2b\} \cong D_2 \cong V_4$ olur.

Soru 3) G bir grup olmak üzere

$$M(G) = \{g \in G : \text{her } x \in G \text{ için } gx = xg\}$$

kümesi G 'nin merkezi olarak adlandırılır. $M(D_4)$ grubunu hesaplayınız.

$M(D_4) = \{g \in D_4 : \text{her } x \in D_4 \text{ için } gx = xg\}$ olduğuna göre x olarak sırasıyla D_4 'ün 8 elemanını alarak her birinin tüm 8 eleman ile değişmeli olup olmadığını kontrol etmeliyiz. e otomatik olarak bu şartı sağlar. Diğer elemanların hiçbirisinin bu özelliği sağlamadığı görülebilir: Örneğin $x = a$ alınır $ab = ba^3 \neq ba$ olup a (aynı zamanda b) merkezde değildir. Dolayısıyla $M(D_4) = \{e\}$ olur.

Soru 4) 5 elemanlı bir devirli grubun D_5 dihedral grubunun normal altgrubu olup olmadığını belirleyiniz. Kosetlerini ve bölüm grubunu bulunuz.

$C_5 \cong \langle a : a^5 = e \rangle$ 5 elemanlı grubu, $D_5 \cong \langle a, b : a^5 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ 10 elemanlı dihedral grubunun 2 indeksli bir altgrubudur ve dolayısıyla normaldir. Yani bölüm grubu oluşturulabilir. Bölüm grubu $10/5 = 2$ elemanlı olduğundan C_2 'ye izomorftur. Kosetler de C_5 ile bC_5 şeklindedir.

Soru 5) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 40\}$ kümesi üzerinde mod 42'deki toplama ve çarpma işlemleri tanımlı olsun. A kümesinin cebirsel yapısını bulup birim elemanını belirleyiniz.

Verilen işlemlere göre A kümesinin bir halka olduğu görülür. Etkisiz eleman 0, birim eleman 22'dir. Gerçekten de $22 \cdot 2 = 2$, $22 \cdot 4 = 4$, $22 \cdot 6 = 6$, ... olduğu görülür.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**