MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:... **08.01.2009**

No :...

Soru 1) Hangi p asal sayıları için $\left(\frac{a}{p}\right)^3 = -\left(\frac{a}{p}\right)$ olduğunu belirleyiniz.

Öncelikle $\left(\frac{a}{p}\right)^3 = \left(\frac{a}{p}\right)$ olduğunu hatırlayalım. $\left(\frac{a}{p}\right) = -\left(\frac{a}{p}\right)$ eşitliği elde edilir. Buradan $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ olmalıdır. Bu da p | a olması durumunda mümkündür.

Soru 2) (a,mn) = 1 ise (a–m,a+m) = 1 veya 2 olduğunu gösteriniz.

(a,mn) = 1 ise (a,m) = 1'dir. O halde (a–m,a+m) = d diyelim. d | 2 olduğunu göstereceğiz. d | (a-m) ve d | (a+m) olduğundan d | [(a+m)+(a-m)] = 2a ve d | [(a+m)-(a-m)] = 2m'dir. Bu durumda (a,m) = 1 olduğundan d | 2 olmalıdır.

Soru 3) n bir doğal sayı olmak üzere hiç bir tamsayının dördüncü kuvvetinin 7n+6 şeklinde olamayacağını gösteriniz.

Eğer $7n+6 = x^4$ olacak şekilde bir x tamsayısı bulunabilseydi, $x^4 = (x^2)^2 \equiv 6$ (7) kongrüansının bir çözümü de var olurdu. Halbuki 6, Q_7'nin bir elemanı değildir. Yani 6, 7 modunda bir ikinci dereceden kalan değildir. O halde bir dördüncü kuvvet de olamaz.

Soru 4) (a,m), (b,m) veya (c,m)'den en az biri 1 ise ax+by+cz ≡ d (m) kongrüansının m^2 tane çözümü olduğunu gösteriniz.

(a,m) = 1 olsun. O halde verilen üç değişkenli kongrüansı ax ≡ d-by-cz (m) olarak düşünürsek sağ tarafın sabit her bir değeri için bu x'e göre tek değişkenli bir kongrüans olur ve (a,m) = 1 varsaydığımız için birtek çözüme sahiptir. Tabii ki d-by-cz ifadesi, m modunda x ve y'nin herbirisinin m tane farklı değeri olacağından m.m = m^2 tane farklı değer alabilir ve bu değerlerin herbirisi için kongrüans bir tek çözüme sahip olacağından toplam m^2 tane çözüme sahip olur.

Soru 5) $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ özelliğindeki tüm p asallarını belirleyiniz.

Gauss'un indirgeme kuralı yardımıyla

$$\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} = 1$$

olduğundan $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ olması için $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$ olmalıdır. O halde p'nin 5 modunda bir tam kare olması gerekir. 5 modundaki tam kareler 1 ve 4 olduğundan $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ olması için p 'nin 5 modunda 1 veya 4'e denk olması gerekli ve yeterlidir. Daha belirleyici olarak, p ≡ 1 (10) veya p ≡ 9 (10) olması da gerek ve yeter şart olarak verilebilir. Ayrıca p = 2 nin de bu şartı sağladığı açıktır.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***