MAT 3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad: .... ………..   10.06.2008

No : ....

Soru 1) **Bir cisimde sadeleştirme kuralının geçerli olup olmadığını belirleyiniz. Sebeplerini açıklayınız.**

Her cisim aynı zamanda sıfır bölensiz bir halka da olduğundan sıfır bölensiz bir halkada sadeleştirme yapılabilir.

Soru 2) $(R,+,.)$ **bir halka olmak üzere**

$$Z(R)=\{a\in R \mid \forall x\in R \text{ için } x.a=x.a\ \}$$

alt kümesinin bir alt halka olduğunu gösteriniz.

$Z(R)=S$ olsun. S'nin bir alt halka olduğunu göstermek istersek $\forall a,b\in S$ için $a+b\in S, a.b\in S$ ve $-a\in S$ olduğunu ya da kısaca $a-b\in S$ ve $a.b\in S$ olduğunu göstermemiz gerekir. $0_R\in R$ olduğundan $S\neq\phi$'dir.

$a,b\in S\Rightarrow (a-b).x=a.x-b.x=x.a-x.b=x.(a-b)$

ve $a-b\in S$ olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\mathrm{a,b\in S\Rightarrow (a.b).x=a.(b.x)=a.(x.b)}$$
$$\mathrm{=(a.x).b=(x.a).b=x.(a.b)}$$

olduğu görülür. Böylece S bir alt halkadır.

Soru 3) **i sayısının çarpma işlemine göre ürettiği grubu belirleyiniz. Bu grubun kamutatör altgrubunun mertebesi nedir? Açıklayınız.**

$<i> = \{i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1\}$

grubu değişmeli grup olduğundan herhangi bir kamutatör elemanı

$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=aa^{-1}bb^{-1}=e$

şeklindedir. O halde kamutatör altgrubu sadece etkisiz elemandan oluşan aşikar gruptur. Dolayısıyla mertebesi 1'dir.

Soru 4) **"G grubu değişmelidir ⇔ f:G→G, f(x) = x^2 şeklinde tanımlı f dönüşümü bir homomorfizmdir". Gösteriniz.**

$(\Rightarrow)$ G değişmeli olsun.

$f(x.y)=(x.y)^2=x.y.x.y=x^2.y^2=f(x).f(y)$ olup f bir homomorfizmdir.

$(\Leftarrow)$ f bir homomorfizm olsun.

$f(x.y)=(x.y)^2=x.y.x.y=f(x).f(y)=x^2.y^2$

olduğundan $x.y=y.x$ olur. Yani G grubu değişmelidir.

Soru 5) $Z_{20}^*=\{x\in Z_{20}\mid (x,20)=1\}$ **çarpım grubunun biri devirli diğeri devirli olmayan 4. mertebeden iki altgrubunu bulunuz.**

$Z_{20}^*=\{\pm1,\pm3,\pm7,\ \pm9\}$ olup $3^2=9,\ 3^3=7,\ 3^4=1$ olduğundan $\langle 3\rangle=\{1,3,7,9\}$ alt grubu Z_{20}^*'ın 4 mertebeli devirli bir altgrubudur.

$H=\{\pm1,\pm9\}$ kümesi Z_{20}^*'ın 4 elemanlı bir alt kümesi olup bir grup oluşturduğundan ve bir tek eleman tarafından üretilemediğinden H, Z_{20}^*'ın devirli olmayan 4. mertebeden bir alt grubudur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. *İNC*