MAT 2008 METRİK UZAYLAR FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:…………………………......... **02.06.2008**

No :..

Soru 1) **X = {x=(x_n) : x=(x_n) gerçel sayıların yakınsak dizisi} kümesi üzerinde**

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$$

fonksiyonunun metrik olup olmadığını araştırınız.

d(x,y) = 0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$ = 0'dır, fakat bu eşitlik $x_n = y_n$ olmasını gerektirmez. Örneğin x_n=1/2n ve y_n=1/3n olarak alınırsa her iki dizi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} |1/2n - 1/3n|$=0'dır. Fakat bu iki dizi aynı dizi değildirler. M1, M3 ve M4 özelliklerinin de sağlandığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla d bir yarı metriktir.

Soru 2) **R üzerindeki alışılmış metriğe göre sonlu öğeli her bir kümenin kapalı olduğunu gösteriniz.**

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olsun.

$a_1 < a_2 < ... < a_n$ olduğunu varsayalım.

$A' = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup ... \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, \infty)$

kümesi açıktır, dolayısıyla A kümesi kapalıdır.

Soru 3) **Bir (X,d) metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık diskin (yuvarın) kapanışının x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk (yuvar) olması gerekmediğine bir örnek veriniz.**

Ayrık metrik uzayda x_0 merkezli 1 yarıçaplı bir açık disk, D(x_0,1) = {x∈ X : d(x_0,x) < 1} = {x_0} olup {x_0}'ın kapanışı kendisidir, çünkü ayrık metrik uzayda her küme hem açık hem de kapalıdır. x_0 merkezli 1 yarıçaplı kapalı disk (yuvar) ise {x∈ X : d(x_0,x) ≤ 1} = X'dir. Bu iki küme birbirinden farklıdır.

Soru 4) (R,d) alışılmış metrik uzayının (N,d) alt metrik uzayında **B={x∈N: 3 < x ≤ 6} kümesi açık mıdır? Açıklayınız. (N = doğal sayılar kümesi)**

B={4,5,6} olup $B = N \cap (3,7)$ olarak yazılabileceğinden ve $(3,7)$ aralığı (R,d) alışılmış metrik uzayının açık bir kümesi olduğundan B kümesi (N,d) alt metrik uzayında açık bir kümedir.

Soru 5) **(X,d) metrik uzayında yakınsak her bir dizinin bir tek limit noktası bulunduğunu gösteriniz.**

Tersine (x_n) dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Verilen $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \geq n_1$ için $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir n_1 doğal sayısı ve $\forall n \geq n_2$ için $d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir n_2 doğal sayısı vardır. Eğer n_0 doğal sayısını $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olarak seçersek $\forall n \geq n_0$ için

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a,b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$'dir.

<u>Not:</u> *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***