MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :……………………………........... **02.05.2008**

Soru1) $G=\{a\in\mathbf{R}\mid a>0, a\neq 1\}$ kümesi üzerinde $a*b=a^{\ln b}$ işlemi ile birlikte $(G,*)$'ın grup olduğunu gösteriniz.

$a,b\in G$ olsun. $b>0$ ve $b\neq 1$ olduğundan $\ln b$ tanımlıdır ve $a>0$ olduğundan $a^{\ln b}\neq 1$ dir. Yani $a*b=a^{\ln b}\in G$ dir. Kapalılık özelliği sağlanır. Doğal logaritmanın tabanı olan e sayısı için $a*e=a^{\ln e}=a^1=a$ ve $e*a=e^{\ln a}=a$ olduğundan * işleminin etkisiz elemanı e dir. $a,b,c\in G$ için

$$(a*b)*c=\left(a^{\ln b}\right)*c=\left(a^{\ln b}\right)^{\ln c}=a^{\ln b\ln c}=a^{\ln b^{\ln c}}=a*(b*c)$$

olduğundan * işlemi birleşmelidir. $a\in G$ için $a\neq 1$ olduğundan $e^{\frac{1}{\ln a}}$ vardır ve G nin bir elemanıdır.

$$a*e^{\frac{1}{\ln a}}=a^{\ln e^{\frac{1}{\ln a}}}=a^{\frac{1}{\ln a}\ln e}=a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{\log_a e}=e$$

$$e^{\frac{1}{\ln a}}*a=\left(e^{\frac{1}{\ln a}}\right)^{\ln a}=e^{\frac{1}{\ln a}\ln a}=e$$

olduğundan G deki her bir a elemanının tersi $e^{\frac{1}{\ln a}}$ dır. Dolayısıyla G * işlemine göre bir gruptur.

Soru 2) $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ bölüm grubunu tanımlayıp elemanlarını belirleyiniz. $|\mathbf{Z}:3\mathbf{Z}|$ indeksini hesaplayınız.

$3\mathbf{Z}\triangleright\mathbf{Z}$ olduğundan $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ $(a+3\mathbf{Z})+(b+3\mathbf{Z})=a+b+3\mathbf{Z}$ ikili işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ bölüm grubu denilir. $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ $3\mathbf{Z}$ nin $\mathbf{Z}$ deki sol(sağ) kosetleridir. Bu kosetler $3\mathbf{Z}, 3\mathbf{Z}+1, 3\mathbf{Z}+2$ dir. $3\mathbf{Z}$ nin $\mathbf{Z}$ deki farklı sol(sağ) kosetlerinin sayısı indeks olduğundan $|\mathbf{Z}:3\mathbf{Z}|=3$ tür.

Soru 3) H ve N, G grubunun iki normal alt grubu ise HN'nin de G grubunun bir normal alt grubu olduğunu gösteriniz.

H ve N normal alt grup olduğundan $\forall g\in G, \forall h\in H$ için $ghg^{-1}\in H$ ve $\forall g\in G, \forall n\in N$ için $gng^{-1}\in N$ dir. $\forall hn\in HN$ için $ghng^{-1}=\underbrace{ghg^{-1}}_{\in H}\underbrace{gng^{-1}}_{\in N}\in HN$ olduğundan $HN\triangleright G$ dir.

$\varnothing:(\mathbf{Z}_9,+)\to(\mathbf{Z}_2,+)$ dönüşümü "$\varnothing(x)=x$'in 2 ile bölümünden kalan" olarak tanımlanıyor. $\varnothing$'nin bir homomorfizm olup olmadığını araştırınız. Bire-bir ve örtenliğini araştırarak türünü belirleyiniz. Bu dönüşümün çekirdeğini bulunuz.

$$\varnothing:\begin{array}{l} 1\to 1\\ 2\to 0\\ 3\to 1\\ 4\to 0\\ 5\to 1\\ 6\to 0\\ 7\to 1\\ 8\to 0\\ 0\to 0\end{array}$$

$\forall a\in\mathbf{Z}_2$ için

$\exists b\in\mathbf{Z}_9 \ni b=2k+1\vee b=2k, k\in\mathbf{Z}, \varnothing(b)=a$ olduğundan $\varnothing$ örtendir, fakat 1:1 değildir. Çünkü $\varnothing(7)=\varnothing(5)$ iken $7\neq 5$ dir. İşlem koruduğunu gösterelim: $\forall a\in\mathbf{Z}_9$ için $a=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}$ ya da $a=2k,\ k\in\mathbf{Z}$ olduğundan

$$\varnothing((2k+1)+(2m+1))=\varnothing(2(k+m+1))=0$$

$$\varnothing((2k+1))+\varnothing((2m+1))=1+1=0$$

$$\varnothing((2k)+(2k+1))=\varnothing(2(2k)+1)=1$$

$$\varnothing((2k))+\varnothing((2k+1))=0+1=1$$

$$\varnothing((2k)+(2m))=\varnothing(2(k+m))=0$$

$$\varnothing((2k))+\varnothing((2m))=0+0=0$$

$\varnothing$ işlem korur. Dolayısıyla $\varnothing$ bir epimorfizmdir. $(\mathbf{Z}_2,+)$ grubunun etkisiz elemanı 0 olduğundan bu dönüşümün çekirdeği

$Ker\varnothing=\{x\in\mathbf{Z}_9\mid\varnothing(x)=0\}=\{0,2,4,6,8\}$ dır.

Soru 5) S_n simetrik grubunu, üzerinde tanımlı olan işlemi de açıklayarak tanımlayınız. Tüm çift permütasyonların oluşturduğu A_n alterne grubunun S_n simetrik grubunun bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

n elemanlı bir küme üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bir çift permütasyonun tersi ve iki çift permütasyonun çarpımı yine bir çift permütasyon olduğundan A_n alterne grubu S_n simetrik grubunun bir alt grubudur.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***