MAT 2008 METRİK UZAYLAR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad: CEVAP ANAHTARI…………………………........... **25.04.2008**

No :...

Soru 1) X herhangi bir küme ve $f: X \to \mathbf{R}$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ biçiminde tanımlanan d fonksiyonunun bir metrik olup olmadığını inceleyiniz.

M1) $d(x,y) = |f(x) - f(y)| \geq 0$'dır.

M2) $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = 0$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$'dır. Ancak bu son eşitlik $x = y$ olmasını gerektirmez. Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $d(2,-2) = |f(2) - f(-2)| = 0$'dır ancak $2 \neq -2$'dir. Bu eşitlik ancak f fonksiyonu bire bir bir fonksiyon iken mümkündür. Yani M2 şartı gerçeklenmez.

M3) $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$

M4) $d(x,y) = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(z)|}_{d(x,z)} + \underbrace{|f(z) - f(y)|}_{d(z,y)}$

olduğundan d fonksiyonu bir yarı metriktir.

Soru 2) $\mathbf{R}$ üzerinde d_A ayrık metriği tanımlı olsun. Bu uzayda herhangi bir kümenin çapını hesaplayınız. Bu uzayda sınırlı olmayan kümeler hakkında ne söylenebilir?

Eğer A kümesi tek elemanlı bir küme ise yani $A = \{a\}$ ise $d_A(A) = \sup\{d_A(a,a) = 0\} = 0$'dır. Eğer A kümesi birden fazla elemana sahip ise $d_A(A) = \sup\{d_A(a,b) \mid a,b \in A\} = \sup\{0,1\} = 1$'dır.

Dolayısıyla çapı sonlu olduğundan da ayrık metrik uzayda her küme sınırlıdır diyebiliriz. Yani ayrık metrik uzayda her küme sınırlıdır sınırlı olmayan kümelerden bahsedilemez.

Soru3) $(\mathbf{R}^2, d)$ alışılmış metrik uzayında $A = \{(x,y): 0 \leq x < 1, y^2 \leq 1\}$ kümesinin içi, dışı, sınırı, yığılma noktaları ve kapanışını bulunuz.

$\overset{\circ}{A} = \{(x,y): 0 < x < 1, y^2 < 1\}$

$dış(A) = \mathbf{R}^2 - \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, y^2 \leq 1\}$

$\partial(A) = \{(x,y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x = 1, -1 \leq y \leq 1\}$

$A = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, y^2 \leq 1\} = \bar{A}$

Soru4) $(\mathbf{R}, d)$ alışılmış metrik uzayının tüm açık kümelerini sınıflandırınız. Bu uzayın (Q, d) alt metrik uzayının açık kümelerini ve bu alt uzaydaki açık yuvarları tanımlayınız.

$(\mathbf{R}, d)$ alışılmış metrik uzayındaki tüm açık kümeler ya (a,b) açık aralıkları ya da bu açık aralıkların keyfi birleşimleri olan kümelerdir. Çünkü herhangi bir metrik uzayda keyfi sayıda açık kümenin birleşimi yine açık bir kümedir. $(a,\infty), (-\infty,a), (-\infty,\infty) = \mathbf{R}$, $a < b < c < d$ olmak üzere $(a,b) \cup (c,d)$ kümeleri açık küme örnekleridir.

$B \subset \mathbf{Q}$ olmak üzere $B = \mathbf{Q} \cap A$ olacak şekilde $\mathbf{R}$'de açık bir A kümesi var ise B'ye (Q, d) alt uzayında açık küme denir. Bu alt uzaydaki açık yuvarlar $y \in \mathrm{Q}$ için $D_Q(y,\varepsilon) = \{x \in \mathbf{Q} \mid d(x,y) < \varepsilon\} = \mathbf{Q} \cap D(y,\varepsilon)$ şeklindedir.

Soru 5) (X,d) herhangi bir metrik uzay ise bu uzayın Hausdorff uzay olduğunu gösteriniz.

(X,d) herhangi bir metrik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde açık $U, V \subset X$ kümeleri bulmalıyız. $x \neq y$ olarak verildiğinden $d(x,y) > 0$'dır. $\varepsilon > 0$ sayısını $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} d(x,y)$ olarak seçersek $U = D(x,\varepsilon), V = D(y,\varepsilon)$ olarak alınırsa istenen görülür.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***