MAT 3008 TOPOLOJİ ARASINAV SORULARI

Ad-SoyadI CEVAP ANAHTARI…………………………........... **21.04.2008**

No :..

Soru 1) $X=[0,1)$ kümesi üzerinde $\tau=\{\varnothing\}\cup\{[0,k),0<k\le 1\}$ şeklinde tanımlanan τ ailesinin bir topoloji olup olmadığını araştırınız.

T1) $\phi\in\tau$ ve $k=1\Rightarrow X=[0,1)\in\tau$

T2)

$A_i=[0,k_i),\ 0<k_i\le 1\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i=[0,k_j)\ni k_j=\min\{k_i\}\in\tau$

T3)

$A_i=[0,k_i),\ 0<k_i\le 1\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i=[0,k_j)\ni k_j=\sup\{k_i\}\in\tau$

olduğundan τ bir topolojidir.

Soru 2) $\mathbf{R}$ üzerinde τ alışılmış topolojisinden faydalanarak $\mathbf{Z}$ üzerindeki alt uzay topolojisini tanımlayınız. $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z},\ n\to 2n$ fonksiyonunun $\mathbf{Z}$'de sürekli olup olmadığını araştırınız.

$\mathbf{Z}$ üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_{\mathbf{Z}}=\{\mathbf{Z}\cap T:T\in\tau\}$ olur. $\{n_0\}=\mathbf{Z}\cap\left(n_0-\frac{1}{1000},n_0+\frac{1}{1000}\right)$ olarak yazılabileceğinden her bir $\{n_0\}$ kümesi $\mathbf{Z}$'de açık bir kümedir. $\mathbf{Z}$'deki her küme tek öğeli kümelerin birleşimi olarak yazılabileceğinden açıktır. Dolayısıyla f fonksiyonu altında $\mathbf{Z}$'deki her açığın ters görüntüsü yine açık olacağından f fonksiyonu süreklidir.

Soru 3) $X=\{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde

$$\tau=\{\varnothing,X,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

topolojisi veriliyor. $A=\{1,2,3,4\}$ kümesinin içini, dışını, sınırını, yığılma noktalarını ve kapanışını bulunuz.

$\overset{\circ}{A}=\{1,2,3\}$ dış$(A)=\left(\overset{\circ}{\{5\}}\right)=\varnothing$

$\partial(A)=\{4,5\}$, $A=\{4,5\}$

$\bar{A}=\{1,2,3,4,5\}$

Soru 4) (X,τ) ve (Y,ρ) iki topolojik uzay ve $f:X\to Y$ verilsin. β,ρ topolojisinin bir tabanı ise f, X'de süreklidir $\Leftrightarrow \forall B\in\beta$ için $f^{-1}(B)\in\tau$'dur. Gösteriniz.

$(\Rightarrow)\ \beta\subset\rho$ olduğundan süreklilik tanımı gereği $\forall B\in\beta$ için $f^{-1}(B)\in\tau$'dur.

$(\Leftarrow)\ \beta,\rho$ topolojisi için bir taban olduğundan $\forall S\in\rho$ için $B_i\in\beta$ olmak üzere $S=\bigcup_{i\in I}B_i$ olarak yazabiliriz. $f^{-1}(S)=f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ olup $f^{-1}(B_i)\in\tau$ olduğundan T3 gereği $\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)\in\tau$'dur. Bu da f'nin X'de sürekli olması demektir.

Soru 5) (X,τ) Hausdorff uzayı ise yakınsak her bir dizinin bir tek limit noktasının olduğunu gösteriniz.

(X,τ) Hausdorff uzay ve (x_n) bu uzayda yakınsak dizi olsun. Tersine (x_n) dizisinin a ve b noktalarına yakınsadığını varsayalım. $a\in A$, $b\in B$ ve $A\cap B=\varnothing$ olacak şekilde A,B açık kümeleri vardır. $x_n\to a$ ve $x_n\to b$ olduğundan her $n\ge n_0$ için $x_n\in A$ ve her $n\ge n_1$ için $x_n\in B$'dir. Dolayısıyla her $n\ge n_2=\max\{n_0,n_1\}$ için $x_n\in A\cap B$ olur. Bu ise $A\cap B=\varnothing$ ile çelişir. O halde yakınsak olan her dizinin limiti bir tektir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**