

MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI.....

17.01.2008

No :.....

Soru 1) 5 modunda sıfırdan farklı iki tam karenin çarpımının alabileceği değerleri belirleyiniz.

5 modunda sıfırdan farklı tam kareler 1 ve 4 olup bunların muhtemel çarpımları 5 modunda 1 veya 4 olabilecektir.

Soru 2) Her bir $n > 1$ tamsayısı için her biri farklı bir pozitif tam sayının küpüne bölünebilen n tane ardışık doğal sayının bulunabileceğini açıklayınız.

$$\begin{aligned}x &\equiv 0 \pmod{2^3} \\x+1 &\equiv 0 \pmod{3^3} \\&\vdots \\x+n-1 &\equiv 0 \pmod{p_n^3}\end{aligned}$$

sisteminde modlar aralarında ikişer ikişer asal olduğundan çözüm vardır. Bulunan x çözümü için $x, x+1, \dots, x+n-1$ sayıları sırasıyla $2^3, 3^3, \dots, p_n^3$ ile bölünebilen ardışık n sayı oluşturur.

Soru 3) $p > 5$ olsun. $24(p-5)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$ olması için gerek ve yeter şartın p 'nin asal olması olduğunu gösteriniz.

Wilson teoremi gereği p 'nin asal olması için gerek ve yeter şartın $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ olması gerektiğini biliyoruz. Sol taraf düzenlendiğinde bu şartın

$$(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)! \equiv -1 \pmod{p}$$

şeklinde ifade edilebileceği ve buradan da

$$(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)! \equiv -1 \pmod{p}$$

ve son olarak

$$24(p-5)! \equiv -1 \pmod{p}$$

bulunur.

Soru 4) x bir doğal sayı olmak üzere $x^2+2 \equiv 0 \pmod{p}$ olacak şekildeki tüm p asal sayılarını bulunuz.

$x^2+2 \equiv 0 \pmod{p}$ olması demek $x^2 \equiv -2 \pmod{p}$ olması, bir başka deyişle -2 'nin bir tam kare olması demektir. Bu da $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$ olması

demektir. Bir başka deyişle bu durum $\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{2}{p}\right)$

olduğundan $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ve $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1$ olmasıyla

mümkündür. Bunların ayrı ayrı incelenmesiyle $p \equiv 1 \pmod{8}$ veya $p \equiv 3 \pmod{8}$ olması gerektiği anlaşılır.

Soru 5) $(a_n) = (11n+6)$ sayı dizisinde kaç tane asal sayı bulunmaktadır? Açıklayınız.

6 ile 11 aralarında asal olduklarından Dirichlet teoremi gereği bu sayı dizisinde sonsuz çoklukta asal sayı vardır.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**