

MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

08.11.2007

No :.....

Soru 1) x^3+x^2-x+3 polinomunun Z tamsayılar kümesi üzerindeki köklerini belirleyiniz.

$n = 2$ için 2 modunda $x = 1$ bir çözümdür. $n = 3$ için $x = 0$ bir çözümdür. $n = 5$ için $x = 0, 1, 2, 3$ ve 4 değerlerinin hiçbiri bir çözüm değildir. Yani 5 modunda bir çözümü yoktur. Böyle bir n sayısı bulunabildiğinden bu polinomun tamsayılarda da kökü yoktur.

Soru 2) $3 \mid \varphi(n)$ olacak şekilde sonsuz çoklukta n doğal sayısının bulunduğunu gösteriniz.

$n = 13^k$ alınırsa $\varphi(n) = 13^k - 13^{k-1} = 13^{k-1}(13-1) = 12 \cdot 13^{k-1}$ olacağından sonuç açıktır. Aslında 13 yerine 3 modunda 1 'e denk olan $3m+1$ şeklinde bir asal sayı alındığında da aynı sonuç elde edilebilir.

Soru 3) x ve y tamsayıları için $ax+by$ lineer toplamının en küçük doğal sayı değeri A ise ve $ax+by = B$ olduğu biliniyorsa A ile B arasındaki ilişki nedir?

$ax+by$ lineer toplamlarından pozitif olanların en küçüğü a ve b sayılarının obebi olacağından $A = (a,b)$ 'dir. Eğer B de bu lineer toplamlardan birisi ise B , obebin bir katı olmalıdır. Yani $A \mid B$ olmalıdır.

Soru 4) $(n,6) = 1$ ise n^2-1 sayısının 12 ile bölünebildiğini gösteriniz.

$(n,6) = 1$ ise k bir tamsayı olmak üzere $n = 6k+1$ veya $n = 6k+5$ şeklindedir. O halde

$$n^2-1 = (6k+1)^2-1 = 36k^2+12k = 12(3k^2+k)$$

ve

$$n^2-1 = (6k+5)^2-1 = 36k^2+60k+24 = 12(3k^2+5k+2)$$

olup her iki halde de n^2-1 sayısı 12 ile bölünebilirdir.

Soru 5) $6n = 13\varphi(n)$ özelliğindeki tüm n tamsayılarını belirleyiniz. 100 'den küçük kaç sayı bu özelliktedir?

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{13} \text{ olup bu kesir de } p \text{ asal olmak üzere}$$

$$1 - \frac{1}{p} \text{ şeklindeki sayıların çarpımı şeklinde}$$

yazılmak istenirse bu ancak $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13}$ şeklinde

yazılabilir. Yani n sayısını bölen iki asal sayı vardır: 2 ve 13 . O halde aranan sayılar $2^a 13^b$ şeklindedir. a ve b pozitif olduğundan 100 'den küçük olanlar ise 26 veya 52 olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC