

# MAT 3008 TOPOLOJİ FİNAL SORULARI

14.08.2007

Ad-Soyad:.....

No :.....

**Soru 1)**  $X = \{a, b, c, d, e\}$  kümesi üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi bulunsun.  $A = \{a, e\}$  altkümesinin yığılma noktaları kümesini açıklamalı olarak elde ediniz.

$X$  sonlu bir küme olduğundan her alt kümesinin tümleyeni de sonlu olacaktır ve dolayısıyla topolojide kalacaktır. Yani her alt kümesi açıktır. Bu da topolojinin ayrık topoloji olduğunu gösterir. Ayrık topolojide hiç bir kümenin yığılma noktası olamaz. Dolayısıyla verilen  $A$  kümesinin yığılma noktaları kümesi boş kümedir.

**Soru 2)**  $X = \mathbb{Q}'$  irrasyonel sayılar kümesi üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisi bulunsun.  $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$  altkümesinin içini açıklamalı olarak elde ediniz.

$A$  kümesinin tümleyeni, irrasyonel sayılar kümesinden iki nokta çıkarılan bir küme olduğundan sayılamazdır. Dolayısıyla topolojinin elemanı değildir. Bu da  $A$  kümesinin açık olmadığını gösterir. O halde iki elemandan en az birisi iç nokta değildir.  $\sqrt{2}$ 'nin bir iç nokta olması için  $\sqrt{2}$ 'yi bulduran bir açık kümenin  $A$  kümesinin alt kümesi olması gerekir.  $\sqrt{2}$ 'yi kapsayıp  $A$  kümesinin içinde kalan iki küme vardır:  $\{\sqrt{2}\}$  ve  $A$ . Bunların ikisinin de tümleyenleri sayılamaz olduğundan açık küme değildirler. O halde  $\sqrt{2}$  bir iç nokta değildir. Benzer şekilde  $\sqrt{3}$ 'ün de bir iç nokta olmadığı gösterilebilir. Yani  $A$ 'nın içi boş kümedir.

**Soru 3)**  $X = \{a, b, c, d, e\}$  kümesi üzerinde  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, e\}\}$  topolojisinin bulunduğunu varsayalım. Bu topoloji için bir taban belirleyiniz.

$$\beta = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{c, d\}\}.$$

**Soru 4)**  $X = \{a, b\}$  kümesi üzerinde  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$  Sierpinski topolojisi bulunsun. Bu topolojiye göre  $A = \{a\}$  ve  $B = \{b\}$  kümelerinin bağlantılılığını inceleyiniz.

Bu kümeler tek nokta kümeleri olduğundan topoloji ne olursa olsun bağlantılıdır.

**Soru 5)**  $X = \{a, b, c, d\}$  kümesi üzerinde  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$  ve  $Y = \{x, y, z, t, u\}$  kümesi üzerinde de  $\rho = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y, z\}, \{x, u\}, \{x, y, z\}, \{x, y, z, u\}\}$  topolojisi veriliyor.  $f, a$ 'yı  $y$ 'ye,  $b$ 'yi  $z$ 'ye,  $c$ 'yi  $u$ 'ya ve  $d$ 'yi de  $y$ 'ye götüren bir dönüşüm ise  $f$   $X$ 'ten  $Y$ 'ye sürekli midir? Açıklayınız.

$\{y, z\} \in \rho$  olup ters görüntüsü  $f^{-1}(\{y, z\}) = \{a, b, d\}$  olup  $\tau$ 'nin elemanı olmadığından  $f$  sürekli değildir.

**Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. İNC