MAT 3035 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI.......... **14.08.2007**

No :..

Soru 1) (X,d) metrik uzayı kompakt ve $f: X_d \to Y_m$ bir homeomorfizm ise Y uzayı da kompakt olur mu, açıklayınız.

f sürekli olduğundan $f(X) \subset Y$ görüntü kümesinin kompakt olduğu teorem gereği söylenebilir. Tabii f örten bir dönüşüm olup $f(X) = Y$ olacağından bu durumda Y de kompakttır diyebiliriz.

Soru 2) Reel alışılmış uzayda Q rasyonel sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesini belirleyiniz.

x reel sayı olsun. x'i bulunduran her aralıkta mutlaka en az bir rasyonel sayı daha olacağından x bir yığılma noktasıdır. Dolayısıyla Q'nun yığılma noktaları kümesi R'nin tamamıdır.

Soru 3) **Q′** irrasyonel sayılar kümesi **R** alışılmış uzayında bağlantılı mıdır?

$G = (-\infty,3)$ ve $H = (3,\infty)$ kümeleri bu uzayda açıktır. G ile H'ın birleşimi A = **Q′** kümesini örter. G ile H kesişmez. Ayrıca G ve H'ın **Q′** kümesinin elemanlarını bulundurduğu açıktır. O halde G ve H kümeleri A'nın bir ayrışımıdır. Yani **Q′** irrasyonel sayılar kümesi **R** uzayında bağlantısızdır.

Soru 4) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisi olur mu? Açıklayınız.

(x_n), X_d metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun ve $p \in X$ noktasına yakınsasın. Yakınsaklık gereği her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n,p) < \varepsilon/2$ ve $d(x_m,p) < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı mevcuttur. O halde aynı n_0 doğal sayısı için

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,p) + d(p,x_n) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Soru 5) V = [p,q) kümesi alışılmış ve ayrık reel uzaylarda p ve q noktalarının bir komşuluğu mudur? Kısaca açıklayınız.

Alışılmış reel uzayda $p \in A \subset [p,q)$ olacak şekilde bir A açığı bulunamaz. Yani V, p noktasının bir komşuluğu değildir.

Benzer şekilde $q \in A \subset [p,q)$ olacak şekilde bir A açığı da bulunamaz. Yani V, q noktasının da bir komşuluğu değildir.

Ayrık reel uzayda ise [p,q) açık bir küme olduğundan $p \in A \subset [p,q)$ olacak şekilde bir A = [p,q) açığı bulunabilir. Yani V, p noktasının bir komşuluğudur.

Ancak $q \in A \subset [p,q)$ olacak şekilde bir A açığı ayrık metrikte de bulunamaz. Yani V, q noktasının bir komşuluğu değildir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**