

MAT 3008 TOPOLOJİ 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI

18.05.2007

No :.....

Soru 1) X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerinde $\tau = \{\phi, A \mid A' = X \setminus A \text{ sayılabilir}\}$ sayılabilir tümleyenler topolojisi veriliyor. Bu topolojinin kapalı kümelerini belirleyiniz.

ϕ 'nin tümleyeni X kapalı bir kümedir. Bunun dışında açık kümelerin tümleyeni olan kapalı kümeler sayılabilir olduğundan X uzayındaki kapalı kümeler sayılabilir olan tüm kümelerdir.

Soru 2) 1. sorudaki sayılabilir tümleyenler topolojisinde hangi dizilerin yakınsak olduğunu belirleyiniz. Sebebini açıklayınız.

$(x_n) \rightarrow x$ olsun. $A = \{x_n \mid x_n \neq x\}$ kümesi (x_n) dizisinin bir alt kümesidir. Her dizi sayılabilir olduğundan altkümesi olan A kümesi de sayılabilirdir. Topolojinin tanımı gereği $A' = X \setminus A \in \tau$ olur. $x \notin A$ olduğundan $x \in A'$ ve $A' \in \tau$ olduğundan A' kümesi x noktasının bir komşuluğudur. O halde belli bir n_0 'dan sonraki tüm x_n elemanları A' kümesinde kalır. Ancak $A' = \{x\}$ olup dizinin n_0 'dan sonraki tüm elemanları x olur. Yani sayılabilir tümleyenler topolojisinde yakınsak olan diziler hemen hemen sabit dizilerdir.

Soru 3) $A \in \tau$ ise $A \cap \delta(A) = \phi$ olduğunu gösteriniz.

A açık olsun. $A = \overset{\circ}{A}$ olur. Her topolojik uzayda her bir kümenin içi, sınırı ve dışı ayrık olduğundan

$$\overset{\circ}{A} \cap \delta(A) = A \cap \delta(A) = \phi$$
 olur.

Soru 4) Bir topolojik uzayda boş olmayan bir kümenin dışı kapalı olabilir mi? Tartışınız.

Her topolojik uzayda bir kümenin dışı tümleyeninin içi olduğundan ve iç açık küme olduğundan dış ta açık bir kümedir. Kapalı olabilmesi için kümenin dışı, açık olmasının yanısıra aynı zamanda kapalı da olmalıdır. Bu da bir kümenin hem açık hem kapalı olması anlamına gelir ki bu ancak ayrık topolojide mümkündür.

Soru 5) X_τ ayrık olmayan topolojik uzay olsun. Herhangi bir $f: X_\tau \rightarrow X_\tau$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

$X_\tau = \{\phi, X\}$ olduğundan hem tanım hem de görüntü uzayındaki topoloji iki elemanlıdır: ϕ ve X . $f^{-1}(\phi) = \phi$ ve $f^{-1}(X) = X$ olup açıkların ters görüntüleri açık olduğundan f ne olursa olsun süreklidir.