MAT 3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…... **16.05.2007**

No :..

Soru 1) Devirli bir grubun her bölüm grubu devirli olur mu? Tartışınız.

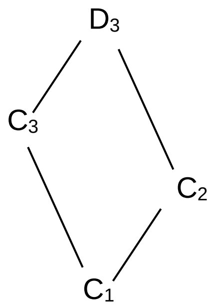
Devirli bir C_n grubunun her altgrubu da devirlidir ve mertebesi n'yi böler. d | n olmak üzere C_d bir altgrup olsun. C_n grubunu kosetlerin ayrık birleşimi olarak yazabiliriz:

$$C_n = C_d \cup a^d C_d \cup a^{2d} C_d \cup .....$$

Dolayısıyla C_n/C_d bölüm grubu da a^d ile üretilen bir devirli grup olacaktır.

Soru 2) 6 elemanlı dihedral grubun tüm altguplarını bulunuz.

6 elemanlı dihedral grup D_3'tür. 6 elemanlı bir grubun özaltgrupları 1, 2 ve 3 elemanlı olabilir. Bunlar da C_1, C_2 ve C_3'tür. Dolayısıyla altgrup tablosu da aşağıdaki şekildedir:



Soru 3) C_4xC_5 grubunda mertebesi 4 olan tüm elemanları belirleyiniz.

$C_4xC_5 \cong C_{20}$ olup bir devirli gruptur. Üretecine a dersek $C_{20} \cong <a \mid a^{20} = e>$ olur. Bu grupta mertebesi 4 olan elemanlar a^5 ve a^{15}'tir. Çünkü a^k elemanının mertebesinin 4 olması için (20,k) = 5 olması gerekir. Bu da k = 5 ve 15 iken mümkündür.

Soru 4) 6 elemanlı grupların kamutatör altgruplarını hesaplayınız.

6 elemanlı iki farklı grup olduğunu biliyoruz. C_6 ve $S_3 = D_3$. C_6 değişmeli olduğundan kamutatör altgrubu {e} olur. $D_3 \cong <e,a,a^2,b,ab,a^2b>$ grubu için ise $xyx^{-1}y^{-1}$ türündeki elemanları hesaplamalıyız. D_3 grubunun kamutatör altgrubu kamutatörlerin sonlu çarpımlarından oluşan altgruptur. x ve y yerine yukardaki 6 grup elemanı yazıldığında sadece e, a ve a^2 elemanlarının elde edildiği görülür. Yani tüm kamutatörler bu üç elemandan birisidir. Örneğin x = a ve y = b alınırsa D_3 grubunda $ab = ba^{-1}$ olduğundan

$$xyx^{-1}y^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = aabb^{-1} = a^2$$

ve x = ab ile y = a alınırsa

$$xyx^{-1}y^{-1} = abab^{-1}a^{-1}a^{-1} = ababa^{-2}$$
$$= ababa = abba^{-1}a = a$$

olur. O halde aranan altgrup C_3 olur.

Soru 5) Bir devirli grubun her epimorfik resminin devirli bir grup olup olamayacağını tartışınız.

$C_n \cong < a \mid a^n = e >$ bir devirli grup olsun. $\varphi : C_n \to \varphi(C_n)$ bir epimorfizm olsun.

$$\varphi(C_n) = < \varphi(a) \mid \varphi(a^n) = \varphi(e) = e' >$$
$$= < \varphi(a) \mid \varphi(a)^n = e' >$$
$$\cong C_n$$

olup devirlidir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***