

MAT 2008 METRİK UZAYLAR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:..... CEVAP ANAHTARI

11.05.2007

No :.....

Soru 1) (X,d) metrik uzayında A ve B kümeleri için $d(A) < d(B)$ olması durumunda A ile B arasında nasıl bir ilişki olabilir? İnceleyiniz.

$A \subset B$ olabilir. Örneğin \mathbb{R} alışılmış uzayında $A = (0,1)$ ve $B = (-1,2)$ ise $d(A) = 1 < 3 = d(B)$ olur. Ancak $A \subset B$ olmak zorunda değildir. Örneğin \mathbb{R} alışılmış uzayında $A = (0,1)$ ve $B = (4,6)$ ise $d(A) = 1 < 2 = d(B)$ olmakla beraber $A \subset B$ değildir. .

Soru 2) Reel alışılmış uzayda \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ kümesinin sınırını belirleyiniz.

A kümesi $[0,1]$ kapalı aralığında kalan rasyonel sayılardan oluşur. \mathbb{Q} kümesinin içi boşküme olduğundan A kümesinin içi de boştur. Dışını bulmak için tümleyeninin içine bakalım. A kümesinin tümleyeni \mathbb{Q}' irrasyonel sayılar kümesi olmak üzere

$(-\infty,0) \cup \{[0,1] \cap \mathbb{Q}'\} \cup (1,\infty)$ şeklinde olup

dış $A = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ olacaktır. O halde

$\delta(A) = \mathbb{R} - \{(-\infty,0) \cup (1,\infty)\} = [0,1]$

olarak bulunur.

Soru 3) \mathbb{R}^2 alışılmış uzayında

$A = \{(a,b) : a \text{ ve } b \text{ rasyonel sayılar}\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ keyfi noktasını alalım. (x,y) bir yığılma noktasıdır ve dolayısıyla A kümesinin yığılma noktaları kümesi \mathbb{R}^2 düzleminin tamamı olur. Çünkü A kümesi ile kesişimi hiç bir rasyonel bileşenli nokta bulundurmayan bir açık disk bulunamaz.

Soru 4) (X,d) bir metrik uzay ise d^2 fonksiyonu X üzerinde bir metrik olur mu? Açıklayınız.

İlk üç şartın her zaman sağlandığı açıktır. Üçgen eşitsizliğine bakalım:

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
eşitsizliğinde her iki tarafın karesi alındığında
 $d^2(x,y) \leq d^2(x,z) + d^2(z,y) + 2d(x,z)d(z,y)$

elde edilir. Burada $2d(x,z)d(z,y) \geq 0$ olan bir sayı olduğundan sağ taraftan kaldırılması durumunda eşitsizliğin sağlanması garanti olmayabilir. Dolayısıyla d^2 fonksiyonu X üzerinde bir metrik olabilir de olmayabilir de.

Soru 5) Bir (X,d) metrik uzayında sonlu bir A kümesinin bir limit noktasının var olup olmayacağını açıklayınız.

Bir noktanın limit noktası olması için her bir açık komşuluğunun kümeye ait sonsuz çoklukta nokta bulundurması gereklidir. Dolayısıyla sonlu bir kümenin limit noktasının olması mümkün değildir.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. İNC