MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI..... **18.01.2007**

No :.....

Soru 1) Her $a \in U_{23}$ için $\left(\frac{-a}{23}\right)=-\left(\frac{a}{23}\right)$ olduğunu gösteriniz.

23 ≡ 3 (4) olduğundan -1 ∉ Q_{23}'tür. Yani -1, 23 modunda bir tamkare değildir. $\left(\frac{-a}{23}\right) = \left(\frac{-1}{23}\right).\left(\frac{a}{23}\right)$ olduğundan $\left(\frac{-1}{23}\right)$ = -1 olup $\left(\frac{-a}{23}\right)=-\left(\frac{a}{23}\right)$ elde edilir.

Soru 2) $x \equiv a \ (m)$
$x \equiv a \ (n)$
sisteminin çözümünün $x \equiv a \ ([m,n])$ olduğunu gösteriniz.

İlk kongrüanstan k bir tamsayı olmak üzere x = a+mk yazabiliriz. Bu değer ikincide yerine konulduğunda

$$a + mk \equiv a \ (n)$$

veya denk olarak $mk \equiv 0$ (n) kongrüansı elde edilir. Bu son kongrüansın çözümü ise

$$k \equiv 0 \left(\frac{n}{(m,n)}\right)$$

şeklindedir. Bu çözüm t bir tamsayı olmak üzere

$$k = \frac{n}{(m,n)}t$$

şeklinde düşünülebilir. Bu değer yukarıda x için bulunan ifadede yerine konulursa

$$x = a + m\frac{nt}{(m,n)} = a + t[m,n]$$

veya $x \equiv a \ ([m,n])$ elde edilir.

Soru 3) $x^{16} + x^2 + x + 3 \equiv 0$ (17) denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Fermat'nın küçük teoremi gereği $x^{16} \equiv 1$ (17) yazabiliriz. O halde verilen kongrüans $x^2 + x + 4 \equiv 0$ (17) olarak düzenlenebilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = -15 \equiv 36$ (17) olduğundan ve 17 asal modunda 36'nın 6 ve 11 gibi iki karekökü olduğundan denklemin kökleri ikinci derece denklemin köklerini veren formülden 5 ve 11 olarak hesaplanabilir.

Soru 4) a bir tek tamsayı ise a^2'nin 8 ile bölümünden kalanının ne(ler) olabileceğini belirleyip sebeplerini açıklayınız.

k bir tamsayı olmak üzere a = 2k+1 olsun. $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1) +1$ olur. Burada k ve k+1 ardışık iki tamsayı olduğundan çarpımları çift olacaktır. Yani q bir tamsayı olmak üzere k(k+1) = 2q şeklinde yazılabilir. O halde $a^2 = 4.2q+1 = 8q+1$ bulunur. Bu da herhangi bir tek a tamsayısının karesinin 8 ile bölümünden kalanın 1 olduğunu gösterir.

Soru 5) 11 modundaki ilkel kökleri bulunuz.

$2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 8$, $2^4 \equiv 5$, $2^5 \equiv 10$, $2^6 \equiv 9$, $2^7 \equiv 7$, $2^8 \equiv 3$, $2^9 \equiv 6$, $2^{10} \equiv 1$ olduğundan 2 bir ilkel köktür. Benzer işlemlerle 6, 7, 8 sayılarının da birer ilkel kök oldukları görülür.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**