MAT 3035 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.. **16.01.2007**

No :..

Soru 1) $\mathbb{R}^2$ alışılmış uzayının bir tam metrik uzay olduğunu gösteriniz.

$\mathbb{R}$ alışılmış uzayının tam olduğunu biliyoruz. $\mathbb{R}^2$'de herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi alırsak bunun herbir bileşen dizisi $\mathbb{R}$ uzayında bir Cauchy dizisi olur ve $\mathbb{R}$ alışılmış uzayının tam olması sebebiyle yakınsak olacaktır. Dolayısıyla (x_n) Cauchy dizisi de $\mathbb{R}^2$'de yakınsak olur. Yani $\mathbb{R}^2$ tamdır.

Soru 2) Ayrık metrik uzayda hangi kümelerin kompakt olduğunu belirleyip sebebini açıklayınız.

Ayrık metrik uzayda sadece sonlu kümeler kompakt olabilir. Gerçekten de sonsuz bir $A = \{x_1, x_2, ...\}$ kümesi alınırsa her noktanın oluşturduğu tek öğeli küme bu noktanın en fazla 1 yarıçaplı bir komşuluğu olarak düşünülebileceğinden $\{\{x_1\}, \{x_2\}, ...\}$ kümesi A'nın bir açık örtüsü olur ve bunun hiçbir sonlu alt örtüsü A'yı örtmez.

Soru 3) [a,b] üzerinde $\mathbb{R}$'den indirgenmiş alışılmış metrik olsun. $f : I = [a,b] \rightarrow (Y,d)$ bir homeomorfizm ise Y uzayı kompakt olur mu? Açıklayınız.

I = [a,b] kapalı aralığı alışılmış metrikte kompakttır. Teorem gereği kompakt altkümelerin sürekli fonksiyon altındaki görüntüleri de kompakt olduğundan ve f homeomorfizm olup örten olduğundan f(I) = Y kümesi de kompakt olacaktır.

Soru 4) $f : (X,d) \rightarrow (Y,m)$ sürekli bir fonksiyon ve (X,d) bağlantılı bir uzay ise Y uzayı da bağlantılı olur mu? Açıklayınız.

f sürekli ve X bağlantılı ise $f(X) \subset Y$ görüntü kümesinin de bağlantılı olduğunu biliyoruz. Y'nin bağlantılı olması için f(X) = Y olması gerekir ki bu da f'in örten olması anlamına gelir. Yani f örten ve sürekli ise X bağlantılı iken Y de bağlantılı olacaktır.

Soru 5) (X,d) kompakt metrik uzayında boş olmayan herhangi bir A kümesinin kapanışı kompakt olur mu? Açıklayınız.

Evet. Teorem gereği kompakt metrik uzayların ancak kapalı alt kümeleri kompakt olabilmektedir. Herhangi bir A kümesinin kapanışı da kapalı bir küme olacağından kompakt olacaktır.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**