

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:CEVAP ANAHTARI.....

12.12.2006

No :

Soru 1) Bir R halkasında sadeleştirme kuralı gerçekleşiyorsa bir tamlik bölgesi olduğunu gösteriniz.

R 'de sadeleştirme kuralı geçerli olsun. R 'de sıfırdan farklı r ve a elemanlarının $r.a = 0$ olacak şekilde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda

$$r.a = 0 = r.0$$

eşitliğinden $a = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Soru 2) \mathbb{Z}_{12} ve \mathbb{Z}_{11} halkalarındaki birimleri belirleyiniz.

\mathbb{Z}_n halkasındaki birimler n ile aralarında asal olan ve 1 ile $n-1$ arasında kalan tüm tamsayı-lardır. O halde \mathbb{Z}_{11} 'deki birimler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; \mathbb{Z}_{11} 'deki birimler ise 1, 5, 7 ve 11'dir.

Soru 3) $f(x)$ ya da $g(x)$ sabit olmamak üzere, $R = \mathbb{Z}_4[x]$ 'de $x^3 = f(x)g(x)$ şeklinde bir çarpanlara ayırmanın mümkün olduğunu gösteriniz.

$f(x) = x^2$, $g(x) = x$ olmak üzere $f(x).g(x) = x^3$ olur. (başka f ve g fonksiyonları da bulunabilir.)

Soru 4) $R = \mathbb{Z}[x]$ halkasında x ve 2 polinomlarının aralarında asal olduğunu; bununla birlikte

$$1 = x.f(x) + 2.g(x)$$

olacak şekilde $f(x)$ ve $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomlarının bulunamayacağını gösteriniz.

x ve 2 polinomlarını bölen sabit dışında bir polinom bulunamayacağından bu iki polinom aralarında asaldır.

\mathbb{Z} bir tamlik bölgesi olduğundan sıfır bölensizdir. Yani sıfırdan farklı sayıların çarpımı hep sıfırdan farklıdır. Bu yüzden verilen eşitliğin sol tarafı sabit olup derecesi sıfırken sağdaki ifadenin derecesi daha büyüktür. Bu yüzden bu özellikte polinomlar bulunamaz. Ama örneğin n asal değilken \mathbb{Z}_n halkasında bu tür polinomlar bulunabilir.

Soru 5) R bir tamlik bölgesi, $f, g \in R$; $u, v \in R$ için $f = ug$ ve $g = vf$ şeklinde sıfırdan farklı elemanlar olsun. u ve v 'nin R 'de iki birim olduğunu ispatlayınız.

$f = ug$ değeri $g = vf$ eşitliğinde yerine konulduğunda

$$g = vf = v(ug) = (vu)g$$

olacağından $vu = 1$ olmalıdır. Bu da u ve v 'nin birer birim olduğunu gösterir.