MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI **23.11.2006**

No :..

Soru 1) İkiden büyük tüm tek sayıların karesinin 4 modunda bire denk olduğunu gösteriniz.

İkiden büyük tüm n tek sayıları k bir tamsayı olmak üzere n = 2k+1 şeklinde yazılabilirler. O halde

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$$

elde edilir ki burada k^2+k bir tamsayı olduğundan $4(k^2+k) \equiv 0$ (4) olduğundan n^2, 4 modunda 1'e denk olur.

Soru 2) Her n tamsayısı için $n^{37}-n$ sayısının 21 ile bölünebildiğini gösteriniz.

21=3·7 olduğundan $n^{37}-n$ in hem 3 hem de 7 ile bölünebildiğini göstermek yeterlidir. $n^{37}-n = n(n^{36}-1)$ olduğuna dikkat edelim. Bu durumda; $3 \mid n$ ise $3 \mid n(n^{36}-1)$ olup istenene uygundur. 3, n'yi bölmezse Fermat'nın küçük teoreminden $n^2 \equiv 1\ (3)$ olup

$$n^{36}-1=\left(n^2\right)^{18}-1\equiv 1^{18}-1\equiv 0\ \ (3)$$

ve $3 \mid \left(n^{36}-1\right)$ elde edilir. $7 \mid n$ ise $7 \mid \left(n^{37}-n\right)$ elde edilir. O halde n'nin 7 ile bölünmediğini düşünelim. Yine Fermat'nın küçük teoremi gereği $n^6 \equiv 1\ \ (7)$ olacağından

$$n^{36}-1=\left(n^6\right)^6-1\equiv 1^6-1=0\ (7)$$

ve $n^{37}-n\ \equiv 0\ \ (7)$ bulunur. Sonuçta $n^{37}-n\equiv 0\ \ (21)$ elde edilir.

Soru 3) Sonsuz çoklukta n tamsayısı için φ(n) sayısının 6 ile bölünebildiğini gösteriniz.

n = 7k şeklindeki sayılar bu özelliktedir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}\varphi(7k) &= 7k – 7k – 1\\ &= 7k–1(7–1)\\ &= 7k–1.6\end{aligned}$$

dır.

Ayrıca n asal iken φ(n) = n-1 olduğundan bunun 6 ile bölünebilmesi için k bir tamsayı olmak üzere n = 6k+1 şeklinde bir asal sayı seçmek yeterlidir. Bu tür asal sayıların sonsuz olduğu da açıktır.

Soru 4) (a,mn) = 1 ise (a−m,a+m) = 1 veya 2 olduğunu gösteriniz.

(a,mn) = 1 ise (a,m) = 1'dir. O halde (a–m,a+m) = d diyelim. d | 2 olduğunu göstereceğiz. d | (a-m) ve d | (a+m) olduğundan d | [(a+m)+(a-m)] = 2a ve d | [(a+m)-(a-m)] = 2m'dir. Bu durumda (a,m) = 1 olduğundan d | 2 olmalıdır.

Soru 5) $2x + 7y \equiv 5\ \ (12)$ kongrüansının çözüm kümesini bulunuz.

(2,12) = 2 olduğundan $2x \equiv 5 - 7y$ (12) kongrüansını almak sonuç vermeyeceğinden mecburen $7y \equiv 5 - 2x$ (12) kongrüansını ele almalıyız. Bu kongrüans ise

$$7y \equiv 5 – 2x \qquad (12)$$

veya denk olarak

$$7y \equiv -7 + 70x \qquad (12)$$

yazılabileceğinden

$$y \equiv - 1 + 10x \qquad (12)$$

ye denktir. O halde çözüm kümesi

Ç = {(0,11), (1,9), (2,7), (3,5), (4,3), (5,1), (6,11), (7,9), (8,7), (9,5), (10,3), (11,1)}

şeklindedir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC