MAT 3008 TOPOLOJİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:…………………………….......... **15.08.2006**
No :...

Soru 1) Sayılabilir bir X kümesi üzerindeki sayılabilir tümleyenler topolojisinin X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

$\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X : A' = X\backslash A$ sayılabilir$\}$ şeklindedir. X uzayı da sayılabilir olduğundan her alt küme ve dolayısıyla da her tümleyen sayılabilir olacaktır ve dolayısıyla topolojinin elemanı olacaktır. Yani bu topoloji ayrık topoloji olur.

Soru 2) (X,τ) herhangi bir topolojik uzay, $A \subset B \subset X$ ve p, A kümesinin bir yığılma noktası ise p'nin, B kümesinin de bir yığılma noktası olduğunu gösteriniz.

$x \in T \in \tau$ özelliğindeki her bir T kümesi için $(T\backslash\{x\}) \cap A \neq \phi$ oluyor ise x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. $A \subset B$ olduğundan $(T\backslash\{x\}) \cap B \neq \phi$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla x, B kümesinin de bir yığılma noktası olur.

Soru 3) Bir (X,τ) topolojik uzayında keyfi sayıda açık kümenin kesişiminin açık bir küme olmayabileceğini gösteriniz.

Reel alışılmış uzayda $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ açık kümedir. Ancak $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ olup kapalıdır. Bu ters örnekte gösteriyor ki açıkların keyfi kesişimi açık olmayabilir.

Soru 4) X boş olmayan herhangi bir küme, $\phi \neq A \subset X$ ve τ ayrık olmayan topoloji ise A kümesinin içini, dışını ve sınırını bulunuz.

$\tau = \{\phi, X\}$ olup tüm açık kümeler ϕ ve X tir. Dolayısıyla A kümesinin içi ve dışı da açık kümeler olacağından bu iki kümeden biri olabilirler. A = X ise her bir $a \in A = X$ için $a \in T \subset A = X$ olacak şekilde bir T açık kümesi bulunması gerektiğinden bu ancak T = X alınmasıyla mümkün olur. O halde $\overset{o}{A} = \overset{o}{X} = X$ olur. A, X'ten farklıysa hiç bir $a \in A$ için $a \in T \subset A$ olacak şekilde bir T açık kümesi bulunamayacağından $\overset{o}{A} = \phi$ olur. A'nın dışı A'nın tümleyeninin içi olacağından $A = \phi$ ise A'nın tümleyeni X olup yukarıdaki gibi dış(ϕ) = X olur. ϕ'den farklı bir A kümesinin tümleyeni de ϕ ve X'ten farklı olacağından dış(A) = ϕ olur. $A = \phi$ ise $\overset{o}{A} = \phi$ ve dış(A) = X olup $\delta(A) = \phi$; A = X ise $\overset{o}{A} = X$ ve dış (A) = ϕ olup $\delta(A) = \phi$ olur. A, ϕ ve X dışında bir küme ise $\overset{o}{A} = \phi$ ve dış (A) = ϕ olup $\delta(A) = X$ olur.

Soru 5) $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu R üzerindeki alışılmış topolojiye göre açık bir fonksiyon mudur?

A = (-1,1) açık kümesini alırsak f(A) = [0,1) olacağından ve bu da R üzerindeki alışılmış topolojide açık bir küme olmadığından f açık fonksiyon değildir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***