

Ad-Soyad:.....

No :.....

Soru 1) \mathbb{R} alışımlı uzayında $A = \{3\} \cup [4,6) \cup (7,\infty)$ kümesinin içini, dışını, sınırını, çapını, kapanışını, yığılma noktaları kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{iç } A &= (4,6) \cup (7, \infty) \\ \text{dış } A &= (-\infty,3) \cup (3,4) \cup (6,7) \\ \partial(A) &= \{3, 4, 6, 7\} \\ d(A) &= \infty \\ \bar{A} &= \{3\} \cup [4,6] \cup [7,\infty) \\ A &= [4,6] \cup [7,\infty) \end{aligned}$$

Soru 2) Bir metrik uzayda $d(A) < d(B)$ ise A ile B arasındaki ilişki ne olabilir? Örneklerle açıklayınız.

Alışımlı reel uzayda $A = (1,2)$ ve $B = (3,5)$ ise $d(A) = 1$ ve $d(B) = 2$ olup $d(A) < d(B)$ dir ve $A \not\subset B$ dir.

Alışımlı reel uzayda $A = (1,2)$ ve $B = (1,5)$ ise $d(A) = 1$ ve $d(B) = 4$ olup $d(A) < d(B)$ dir ve $A \subset B$ dir.

Yani A ile B kümeleri hakkında net bir şey söylenemez.

Soru 3) Bir X_d metrik uzayında bir kümenin sınırı tümleyeninin sınırına eşit olur mu? Açıklayınız.

$$\begin{aligned} \partial(A) &= X \setminus (\text{iç}(A) \cup \text{dış}(A)) \\ \text{ve} \\ \partial(X \setminus A) &= X \setminus (\text{iç}(X \setminus A) \cup \text{dış}(X \setminus A)) \\ \text{yazılabilir.} \\ \text{dış}(A) &= \text{iç}(X \setminus A) \\ \text{ve} \\ \text{dış}(X \setminus A) &= \text{iç}(X \setminus (X \setminus A)) = \text{iç}(A) \end{aligned}$$

olduğundan sorulan iki kümenin her zaman eşit olduğu görülür.

Soru 4) Ayrık metrik uzayda $d(a,b) + d(b,c) = 1$ ise a, b, c noktalarının birbirlerine göre konumlarını açıklayınız.

Ayrık metrikte uzaklıklar ya 1 ya da 0 olduğundan bu iki uzaklığın toplamının 1 olması demek birinin 1 diğeri 0 olması demektir. $d(a,b) = 0$ ve $d(b,c) = 1$ ise $a=b$ ve $b \neq c$ demektir. $d(b,c) = 0$ ve $d(a,b) = 1$ ise $a \neq b$ ve $b=c$ demektir.

Soru 5) $A = \{4/n^4 : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi, ayrık uzayda ve alışımlı reel uzayda kapalı mıdır? Kısaca açıklayınız.

$4/n^4$ dizisi alışımlı reel uzayda sifıra yakınsar ve 0, A kümesinin bir yığılma noktasıdır. Ancak 0, A kümesinin bir elemanı değildir. O halde A kümesi kapalı değildir. Ayrık metrikte ise her küme kapalı (hem de açık) olduğundan A kümesi kapalıdır.