MAT 2008 METRİK UZAYLAR 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI **05.05.2006**

No :...

Soru 1) Ayrık metrik uzayda her kümenin hem açık hem de kapalı olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon \leq 1$ seçilirse $D(a, \varepsilon) = \{a\}$ olup her noktanın oluşturduğu küme bu noktanın bir açık komşuluğudur. Dolayısıyla tek nokta kümeleri ayrık metrik uzayda açık kümedirler. O halde herhangi bir A kümesi için $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ yazılabileceğinden ve açık kümelerin her türlü birleşimi de açık olduğundan A kümesi açıktır. A kümesinin tümleyeni de bu uzayda bir küme olacağından açıktır. Yani A aynı zamanda kapalıdır da.

Soru 2) Bir metrik uzayda bir D(a,r) açık yuvarından alınan her noktanın bir iç nokta olduğunu gösteriniz.

$b \in D(a,r)$ olsun. $\varepsilon \leq r - d(a,b)$ alınırsa

$$b \in D(b, \varepsilon) \subset D(a,r)$$

olur. Çünkü $d(a,b) \leq r-\varepsilon < r$'dir.

Soru 3) Bir uzayda açık olan hangi kümeler bu uzayın bir altuzayında da açık olurlar?

Eğer X üstuzayında açık olan bir A kümesi *tamamen Y altuzayında kalıyorsa* o zaman altuzaydaki açıkların elde ediliş yöntemine göre

$$A \cap Y = A$$

yazılabileceğinden A altuzayda da kesinlikle açık olacaktır.

Soru 4) R^2 alışılmış uzayında ve R^2 ayrık uzayında D((0,1),2), D((0,1),1) ve D((0,1),0.1) açık komşuluklarını belirleyiniz.

Alışılmış uzayda

$$D((0,1),2) = \{(x,y) : \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} < 2\}$$

$$= \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 < 4\}$$

kümesi (0,1) merkezli ve 2 yarıçaplı çemberin içidir. Benzer olarak

$$D((0,1),1) = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 < 1\}$$

kümesi (0,1) merkezli ve 1 yarıçaplı çemberin içidir. Son olarak D((0,1),0.1) kümesi de (0,1) merkezli ve 0.1 yarıçaplı çemberin içidir.

Ayrık uzayda ise

$$D((0,1),2) = \{(x,y) : d_A((x,y),(0,1)) < 2\}$$

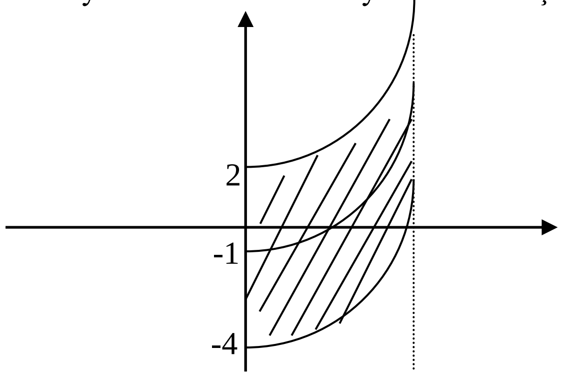
kümesi yarıçap 2 olup 1'den büyük olduğundan uzayın tamamıdır, yani R^2'dir. Diğer iki komşuluk için yarıçap 1'den büyük olmadığından bu komşuluklar noktanın kendisinden oluşurlar. Yani $\{(0,1)\}$'e eşittirler.

Soru 5) B([0,3]) kümesi üzerinde

$d(f,g) = \sup\{ |f(x)-g(x)| : x \in [0,3]\}$ metriği veriliyor. Bu metriğe göre $D(x^2-1, 3)$ açık komşuluğunu belirleyip çiziniz.

$D(x^2-1, 3) = \{f \in B([0,3]) : \sup\{|f(x)-(x^2-1)| < 3\}$

şeklinde olup [0,3] aralığında x^2-1 parabolüne 3 birimden yakın olan tüm fonksiyonlardan oluşur.



Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***