MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…………………………….......... **14.04.2006**

No :...

Soru 1) Değişmeli bir grupta ikinci mertebeden elemanların kümesinin bir altgrup olduğunu gösteriniz.

G grubundaki ikinci mertebeden elemanların kümesini H ile gösterelim. a ve b, H'ın iki elemanı olsun. $ab^{-1} \in H$ olduğunu göstermeliyiz. $a^2 = b^2 = e$ olduğunu biliyoruz. O halde $a = a^{-1}$ ve $b = b^{-1}$ yazabiliriz. G'nin değişmeliliğini kullanarak

$$(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = abab = a^2b^2 = e.e = e$$

elde ederiz ki bu da, ab^{-1} etkisiz eleman olamayacağından, ab^{-1} elemanının mertebesinin 2 olduğunu gösterir. Yani $ab^{-1} \in H$ olur ve $H<G$ elde edilir.

Soru 2) Bir devirli grubun her bölüm grubunun değişmeli oluşunu açıklayınız.

Her devirli grup değişmelidir. Ayrıca her değişmeli grubun bölüm grubu da değişmeli olduğundan her devirli grubun her bölüm grubu da değişmelidir.

Soru 3) n-inci mertebeden iki devirli grubun izomorfik olduğunu gösteriniz.

$C_n \cong \langle a \rangle$ ve $C_n \cong \langle b \rangle$ olsun. Bu durumda $a^n = b^n = e$ demektir. $\varphi : \langle a \rangle \to \langle b \rangle$ dönüşümünü $a^k \to b^k$ olarak tanımlarsak φ dönüşümü bir izomorfizmdir. (kolayca görülebilir)

Soru 4) A_n, S_n'in normal altgrubu mudur? S_n/A_n bölüm grubunu belirleyiniz. Bu grup hangi gruba izomorftur? Neden?

A_n, S_n'in iki indeksli bir altgrubudur. Çünkü $|A_n| = n!/2$, $|S_n| = n!$'dir. İndeksi iki olan altgruplar normal altgrup olacağından A_n, S_n'in iki indeksli bir normal altgrubudur. O halde bölüm grubu oluşturulabilir ve bölüm grubu iki elemanlıdır. Yani C_2 devirli grubuna izomorftur.

Soru 5) $\varphi : (Z,+) \to (3Z,+)$, $n \to 3n$ dönüşümünün türünü belirleyiniz. Çekirdeğini bulunuz. Çekirdek kaç elemanlıdır? Z/3Z bölüm grubunu belirleyiniz.

φ dönüşümü 1:1 ve örtendir ve işlem korur. Yani bir izomorfizmdir.

$$\text{Ker } \varphi = \{n \in \mathbf{Z} : \varphi(n) = 3n = 0\} = \{0\}$$

olduğu açıktır. Tabii ki çekirdek tek elemanlıdır. **Z**'nin 3**Z** ile bölüm grubu {3**Z**, 1+3**Z**, 2+3**Z**} olacağından 3 elemanlı C_3 devirli grubuna izomorftur.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***