MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI........... **25.01.2006**

No :...

Soru 1) 3 modunda 2'ye denk olan sonsuz çoklukta asal sayı bulunduğunu gösteriniz.

Tersine 3 modunda ikiye denk olan sonlu tane asal sayı bulunduğunu düşünelim. Bunları p_1, p_2, ..., p_k ile gösterelim.

$$A = 3p_1.p_2...p_k + 2$$

sayısını tanımlayalım. A sayısının 3 modunda ikiye denk olduğu ve yukarıdaki p_n asallarının hepsinden büyük olduğu açıktır. Ayrıca p_n asallarının hepsiyle bölünce A sayısı 2 kalanını verecektir. Yani asal böleni yoktur. O halde bileşik sayı değildir ve asaldır. Bu da çelişki olduğundan 3 modunda ikiye denk sonsuz çoklukta asal sayı mevcut olduğu sonucuna varırız.

Soru 2) $\left(\frac{55}{179}\right)$ = ?

$$\left(\frac{55}{179}\right)=\left(\frac{5}{179}\right)\left(\frac{11}{179}\right)=\left(\frac{179}{5}\right)(-1)^{2.89}\left(\frac{179}{11}\right)(-1)^{89.5}$$

$$= -\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{11}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{11}\right) = -\left(\frac{3}{11}\right)$$

$$= -\left(\frac{11}{3}\right)(-1)^{5.1} = \left(\frac{11}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Soru 3) Hangi p asal sayıları için $\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{5}{p}\right)$ olduğunu belirleyiniz.

p asal olsun. Ya p=2'dir, ya da p bir tek asal sayıdır. p=2 ise $\left(\frac{2}{5}\right)=-1$ ve $\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)=1$ olup 2 için bu özellik doğru değildir. İkinci olarak p, 5'ten farklı bir tek asal sayı ise p-1 çift sayı olacağından

$$\left(\frac{p}{5}\right)=\left(\frac{5}{p}\right)(-1)^{2.\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{5}{p}\right)(-1)^{p-1} = \left(\frac{5}{p}\right)$$

olur. Özel olarak p = 5 olması durumunda iki sayı da 0 olup yine eşitlik sağlanır.

Soru 4) p ve q farklı asallar olmak üzere n = pq şeklinde yazılabilen tüm mükemmel sayıları belirleyiniz.

n = pq mükemmel sayı ise $t(n) = 2n$ olmalıdır. Yani $t(pq) = 2pq$ ve denk olarak

$$1 + p + q + pq = 2pq$$

olmalıdır. O halde

$$pq = p + q + 1$$

veya

$$p = \frac{q+1}{q-1}$$

elde edilir. q = 2 ise p = 3, q = 3 ise p = 2 elde edilir ki iki halde de n = 6 mükemmel sayıdır. $q > 3$ ise q−1, q+1 sayısını bölmeyeceğinden n = pq mükemmel olamaz.

Soru 5) Ardışık iki sayının aralarında asal oluşunu kullanarak her pozitif n tamsayısı için {1, 2, 3, ... , 2n} kümesinin n+1 elemanlı her altkümesinin aralarında asal iki sayı bulundurduğunu gösteriniz.

1 ile 2n arasında 2n tane sayı vardır ve bunlar içinden n+1 tane seçildiğinde en az iki tanesi ardışık olmalıdır. Tersine bu n+1 sayı içinde ardışık iki tane olmasa bu sayıların herhangi ikisi arasında üçüncü bir başka sayı olmalıydı. Yani bu sayılar en iyi ihtimalle 1, 3, 5, 7, ... veya 2, 4, 6, ... şeklinde olur. Bu şekilde bu n+1 sayı arasında en azından n tane daha sayı olmalıdır. Toplamda ise n+1 + n = 2n+1 sayı olması gerekirdi. Bu ise toplam 2n sayı verilmiş olmasıyla çelişir.

<u>**Not:**</u> *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***