

Ad-Soyad:.....

No :.....

Soru 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ fonksiyonu \mathbb{R} üzerindeki alışılmış topolojiye göre açık, kapalı dönüşüm olur mu? Bir homeomorfizm midir? Açıklayınız.

$(-1,1)$ kümesi açık olup f altındaki görüntüsü $[0,1)$ kümesidir ve alışılmış topolojide açık bir küme değildir. O yüzden f , açık dönüşüm değildir. Her kapalı kümenin görüntüsü de kapalı olacağından f kapalı dönüşümdür. Son olarak $f(-1) = f(1)$ olduğundan f birebir değildir ve bu yüzden bir homeomorfizm olamaz.

Soru 2) Ayrık topolojik uzayda hangi dizilerin yakınsak olduğunu açıklayınız.

(x_n) bir dizi olsun. (x_n) dizisinin bir a noktasına yakınsaması demek belli bir terimden sonraki tüm terimlerinin a noktasını bulduran her T açık kümesinde kalması demektir. $\{a\}$ kümesi de ayrık topolojinin bir elemanı olduğundan açıktır ve (x_n) dizisinin belli bir terimden sonraki tüm terimlerinin $\{a\}$ kümesinde kalması demektir. Bu da belli bir yerden sonraki tüm terimlerin a 'ya eşit olması anlamına gelir. Dolayısıyla ayrık topolojik uzayda yakınsak olan diziler sonlu sayıda terimleri farklı olabilen ama sonraki tüm terimleri sabit olan dizilerdir.

Soru 3) A , \mathbb{R}^2 'de bağlantılı ise $\mathbb{R}^2 \setminus A$ kümesi de bağlantılı olur mu? Örnek ile açıklayınız.

Olabilir de olmayabilir de. Örneğin A kümesi bir disk ise tümleyeni düzlemden bir disk çıkarılarak elde edilen bir küme olur ve bağlantılıdır. Ancak A kümesi $\{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde sonsuz bir doğru ise ($y=1$ doğrusu) tümleyeni $y=1$ doğrusunun alt ve üstünde kalan iki düzlem parçası olur ve bu küme bağlantılı değildir.

Soru 4) $I = [0,1]$ ve $A = [a,b]$ kümeleri üzerinde alışılmış topoloji bulunsun. I ile A 'nın homeomorf olduklarını gösteriniz. (Homeomorfizm şartlarını göstermeden)

$f: I \rightarrow A$, $f(x) = (b-a)x + a$ olarak tanımlanırsa f birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli olacağından bir homeomorfizmdir.

Soru 5) (x_n) dizisi X_d metrik uzayında bir Cauchy dizisi ve (x_{n_k}) , (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise $d(x_n, x_{n_k}) \rightarrow 0$ oluşunu açıklayınız.

(x_n) bir Cauchy dizisi ise her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir n_0 sayısı bulabiliriz ki bu n_0 sayısından büyük olan her m, n doğal sayı çifti için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olur. (x_{n_k}) , (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise bu alt dizinin terimleri de aynı zamanda (x_n) dizisinin terimleri olacağından $d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$ olacaktır. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bu doğru olduğundan $d(x_n, x_{n_k})$ sayıları sıfıra yaklaşacaktır.